

**MINISTERUL EDUCAȚIEI**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI**  
**Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”**  
**29 NOIEMBRIE 2024**  
**MATEMATICĂ**  
**BAREM DE EVALUARE**  
**CLASA a IX-a**

IX

**Problema I (10 puncte)**

Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  și  $M \in (AB), N \in (AC)$ . Să se arate că punctele  $M, G, N$  sunt coliniare dacă și numai dacă  $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$ .

**Soluție.**

Se notează rapoartele date  $\frac{BM}{MA} = a$  și  $\frac{CN}{NA} = b \Rightarrow \frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = a + b$  (1p)

Observația că  $M$  împarte segmentul orientat  $\overrightarrow{BA}$  în raportul  $-a$  și  $N$  împarte  $\overrightarrow{CA}$  în  $-b$  (1p)

iar  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$  (1p)

conduc la  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{1+a} \overrightarrow{GB} + \frac{a}{1+a} \overrightarrow{GA}$  (1)

iar  $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{1+b} \overrightarrow{GC} + \frac{b}{1+b} \overrightarrow{GA} = \frac{1}{1+b} (-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) + \frac{b}{1+b} \overrightarrow{GA} = \frac{b-1}{b+1} \overrightarrow{GA} - \frac{1}{1+b} \overrightarrow{GB}$  (2) (2p)

Din (1) și (2)  $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}$  sunt paraleli, respectiv punctele  $G, M, N$  sunt coliniare

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{1+a}}{\frac{b-1}{b+1}} = \frac{\frac{1}{1+a}}{-\frac{1}{1+b}} \Leftrightarrow \frac{a}{b-1} = -1 \Leftrightarrow a = 1-b \Leftrightarrow a+b=1 \Leftrightarrow \frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1. \quad (2p)$$

**Problema a II-a (10 puncte)**

Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale strict pozitive, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^2 + bc}{b+c} + \frac{b^2 + ca}{c+a} + \frac{c^2 + ab}{a+b} \geq a+b+c.$$

(Ovidiu Drâmbe, *Inegalități*)

**Soluție.**

Se adună în ambii membri  $a+b+c$  (1p)

Și se constată că

$$\frac{a^2 + bc}{b+c} + a = \frac{a^2 + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c}{b+c} = \frac{a(a+b) + c(a+b)}{b+c} = \frac{(a+b) \cdot (a+c)}{b+c} \quad (1p)$$

Așadar, relația din datele problemei devine:

**MINISTERUL EDUCAȚIEI**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI**  
**Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”**  
**29 NOIEMBRIE 2024**  
**MATEMATICĂ**  
**BAREM DE EVALUARE**  
**CLASA a IX-a**

IX

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + a + \frac{b^2+ca}{c+a} + b + \frac{c^2+ab}{a+b} + c \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+b)(c+a)}{a+b} \geq 2(a+b+c).$$

Realizarea notației  $b+c=a, a+c=b, a+b=c$  (1p)

și rescrierea relației sub forma  $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{yx}{z} \geq x+y+z$  (1p)

Aducerea relației la forma  $\frac{xyz}{x^2} + \frac{xyz}{y^2} + \frac{xyz}{z^2} = xyz \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$  (1p)

Utilizarea inegalității mediilor (1p) și constatarea că

$$\frac{xyz}{x^2} + \frac{xyz}{y^2} + \frac{xyz}{z^2} = xyz \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq xyz \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \right) = xyz \cdot \frac{x+y+z}{xyz} = x+y+z$$
 (1p)

Cu egalitate pentru  $x=y=z$ , respectiv  $a=b=c$  (1p).

