

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI

Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
29 NOIEMBRIE 2024
MATEMATICĂ

XII

Problema I (10 puncte)

Se consideră intervalul $H = (0, 1)$.

- a) Arătați că relația $a * b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție pe H .
- b) Demonstrați că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y > 0$, unde legea „ $*$ ” este legea definită la punctul a).
- c) Știind că legea „ $*$ ” definită la punctul a) este asociativă, rezolvați în H ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$.

Problema a II-a (10 puncte)

Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} + \arctg x$.

- a) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 t \cdot [f(t) - \arctgt] dt = \frac{e-1}{2}$.
- b) Să se arate că $1 \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \left(e + \frac{\pi}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Să se arate că $\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx \geq \frac{1}{n} f^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe câte o foaie separată, care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

