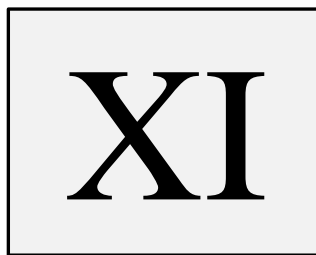


MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI

Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
29 NOIEMBRIE 2024
MATEMATICĂ



Problema I (10 puncte)

Două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ se numesc **matrice similare**, dacă există un număr natural nenul n , astfel încât $\det(A + B) = n$ și $\det A = \det B = n^2$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se consideră matricele

a) Arătați că matricele X și Y sunt **matrice similare**.

b) Arătați că, dacă $C \in M_2(\mathbb{R})$ și $X \cdot C = Z$, atunci matricele X și C sunt **matrice similare**.

c) Demonstrați că, pentru orice număr natural k , există un număr natural n , astfel încât $\det(X^k) = n^2$.

Problema a II-a (10 puncte)

Fie șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, cu termeni strict pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

a) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ și $a \in (0, 1)$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}}$.

b) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ și $a \in (0, \infty)$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}}$.

(Eventual, se poate folosi fără demonstrație că dacă avem șirul $(s_n)_n$, cu termeni strict pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln s_n}{s_n} = 0$.)

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată, ce se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul când s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 (un punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.