

**MINISTERUL EDUCAȚIEI**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI**  
**Concursul Interdisciplinar „Vrânceanu – Procopiu”**  
**29 NOIEMBRIE 2024**  
**MATEMATICĂ**  
**BAREM DE EVALUARE**  
**CLASA A XII-A**

XII

**Problema I (10 puncte)**

Se consideră intervalul  $H = (0, 1)$ .

- a) Arătați că relația  $a * b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$  definește o lege de compoziție pe  $H$ .
- b) Demonstrați că funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  are proprietatea  $f(xy) = f(x) * f(y)$ ,  $\forall x, y > 0$ , unde legea „ $*$ ” este legea definită la punctul a).
- c) Știind că legea „ $*$ ” definită la punctul a) este asociativă, rezolvați în  $H$  ecuația  $x * x * x = \frac{1}{2}$ .

**Soluție:**

a)  $a, b \in (0, 1) \xRightarrow{(1p)} (1-a)(1-b) > 0 \xRightarrow{(1p)} ab + (1-a)(1-b) > ab \xRightarrow{(1p)} a * b \in (0, 1)$ .

b) Se demonstrează egalitatea (2p).

c) Notăm  $x * x = y$ , astfel  $x * x * x = x * y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow x + \frac{x^2}{x^2 + (1-x)^2} = 1$  (1p).

După efectuarea calculelor se obține ecuația  $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$  (2p) care are în  $H = (0, 1)$ , soluția  $x = \frac{1}{2}$  (1p).

**Problema a II-a (10 puncte)**

Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2} + \operatorname{arctg} x$ .

- a) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{x}} \int_t^1 [f(t) - \operatorname{arctg} t] dt = \frac{e-1}{2}$ .
- b) Să se arate că  $1 \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \left(e + \frac{\pi}{4}\right)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- c) Să se arate că  $\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx \geq \frac{1}{n} f^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Soluție:**

**MINISTERUL EDUCAȚIEI**  
**INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI**  
**Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”**  
**29 NOIEMBRIE 2024**  
**MATEMATICĂ**  
**BAREM DE EVALUARE**  
**CLASA A XII-A**

XII

(2p) a) Se calculează  $\int_{\frac{1}{x}}^1 t \cdot [f(t) - \arctgt] dt = \frac{e - e^{\frac{1}{x^2}}}{2}$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^1 t \cdot [f(t) - \arctgt] dt = \frac{e-1}{2}$ .

b) (1p)  $f$  funcție continuă, monoton crescătoare pe  $[0, 1]$  și  $1 \leq f(x) \leq e + \frac{\pi}{4}$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

De aici  $1 \leq f^n(x) \leq \left(e + \frac{\pi}{4}\right)^n$ ,  $\forall x \in [0, 1]$  (1p)

(1p) Aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite rezultă că  $1 \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \left(e + \frac{\pi}{4}\right)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) (2p)  $f$  continuă, monoton crescătoare pe  $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ , de aici  $f(x) \geq f\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ,  $\forall x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$

și  $f^n(x) \geq f^n\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ,  $\forall x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$  (1p).

(1p) Aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite rezultă că  $\int_{\frac{n-1}{n}}^1 f^n(x) dx \geq \frac{1}{n} f^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

