

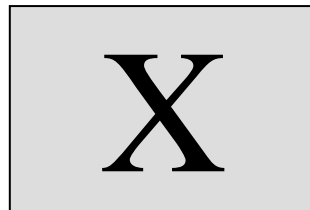
MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”

29 NOIEMBRIE 2024

MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE

CLASA a X-a



Problema I (10 puncte)

Rezolvați ecuația $9^{\frac{\log_x y}{2}} + 9^{\frac{\log_y z}{2}} + 9^{\frac{\log_z x}{2}} \geq 9$ pentru orice trei numere reale supraunitare.

Soluție:

Aplicarea inegalității mediilor

(1p)

$$9^{\frac{\log_x y}{2}} + 9^{\frac{\log_y z}{2}} + 9^{\frac{\log_z x}{2}} \geq 3\sqrt[3]{9^{\frac{\log_x y}{2}} \cdot 9^{\frac{\log_y z}{2}} \cdot 9^{\frac{\log_z x}{2}}} = 3\sqrt[3]{9^{\frac{1}{2}(\log_x y + \log_y z + \log_z x)}} \geq$$

(4p)

$$\geq 3\sqrt[3]{9^{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(\log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z x)}}} = 3\sqrt[3]{9^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt[3]{(3^2)^{\frac{3}{2}}} = 3\sqrt[3]{3^3} = 3 \cdot 3 = 9$$

(4p)

Problema a II-a (10 puncte)

Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe distincte care verifică condiția $\operatorname{Re}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = 0$. Arătați că $|z_3 - z_1|^{2025} + |z_3 - z_2|^{2025} \leq |z_1 - z_2|^{2025}$.

Soluție:

Fie $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ puncte în plan având afixele indicate. (1p)

Din $\operatorname{Re}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = 0 \Rightarrow CA \perp CB \Rightarrow A, B, C$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic (2p)

cu laturile $a = BC = |z_3 - z_2|, b = AC = |z_3 - z_1|, c = BA = |z_2 - z_1|$ (1p)

$$AC^2 + BC^2 = BA^2 \Rightarrow b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

(1p)

Se observă că $\frac{b}{c}, \frac{a}{c}$ sunt fracții subunitare (1p)

Construcția funcției $f: R \rightarrow R, f(x) = \left(\frac{b}{c}\right)^x + \left(\frac{a}{c}\right)^x, f(2) = 1$, funcție descrescătoare (1p)

Inecuația devine $b^x + a^x \leq c^x$ sau $\left(\frac{b}{c}\right)^x + \left(\frac{a}{c}\right)^x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 = f(2) \Rightarrow x \geq 2$ (1p)

Concluzia, pentru $x = 2025 \Rightarrow$ inegalitatea

(1p)