

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
29 NOIEMBRIE 2024
MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE
CLASA A XI-A



Problema I (10 puncte)

Două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ se numesc **matrice similare**, dacă există un număr natural nenul n , astfel încât $\det(A + B) = n$ și $\det A = \det B = n^2$.

Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $Z = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că matricele X și Y sunt **matrice similare**.

b) Arătați că, dacă $C \in M_2(\mathbb{R})$ și $X \cdot C = Z$, atunci matricele X și C sunt **matrice similare**.

c) Demonstrați că, pentru orice număr natural k , există un număr natural n , astfel încât $\det(X^k) = n^2$.

Soluție:

a) Calculăm $\det(X + Y) = 2 \in \mathbb{N}^*$ (1,5p) și $\det X = \det Y = 4 = 2^2$ (1,5p) de aici X și Y sunt **matrice similare**.

b) Se determină matricea $C = X^{-1} \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (2p), se calculează $\det(X + C) = 2 \in \mathbb{N}^*$ și $\det X = \det C = 4 = 2^2$, rezultând astfel că X și C sunt **matrice similare**. (2p)

c) $\det(X^k) = (\det X)^k = 4^k = (2^2)^k = 2^{2k}$ (1p). Așadar, pentru orice număr natural k , există un număr natural $n = 2^k$, astfel încât $\det(X^k) = n^2$ (1p).

Problema a II-a (10 puncte)

Fie șirurile $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$, cu termeni strict pozitivi astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

a) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ și $a \in (0, 1)$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}}$.

b) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ și $a \in (0, \infty)$, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}}$.

(Eventual, se poate folosi fără demonstrație că dacă avem șirul $(s_n)_n$, cu termeni strict pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln s_n}{s_n} = 0$.)

Soluție.

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VASLUI
Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu – Procopiu”
29 NOIEMBRIE 2024
MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE
CLASA A XI-A



a) Fie $z_n = \ln \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}}$

$$= y_n \ln x_n - x_n \ln y_n \quad (1p)$$

$$z_n = y_n \left(\ln x_n - \frac{x_n}{y_n} \ln y_n \right) = y_n \left[\ln \frac{x_n}{y_n} + \left(1 - \frac{x_n}{y_n} \right) \ln y_n \right] .$$

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \cdot [\ln a + (1-a) \cdot \infty] = \infty, \quad (2p)$$

$$\text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}} = \infty. \quad (1p)$$

b) Fie șirurile $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$, definite prin $u_n = \frac{1}{x_n}, v_n = \frac{1}{y_n}, w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{a}.$$

$$\text{Avem } \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}} = \frac{(v_n)^{\frac{1}{u_n}}}{(u_n)^{\frac{1}{v_n}}}. \quad (1p)$$

$$\text{Fie } t_n = \ln \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}} = \ln \frac{(v_n)^{\frac{1}{u_n}}}{(u_n)^{\frac{1}{v_n}}} = \frac{1}{u_n} \ln v_n - \frac{1}{v_n} \ln u_n \quad (1p)$$

$$t_n = \frac{1}{v_n \cdot w_n} \ln v_n - \frac{1}{v_n} \ln(v_n \cdot w_n) = \frac{1}{w_n} \cdot \frac{\ln v_n}{v_n} - \frac{\ln v_n}{v_n} - \frac{\ln w_n}{v_n}.$$

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a \cdot 0 - 0 - 0 = 0, \quad (2p)$$

$$\text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{y_n}}{(y_n)^{x_n}} = 1. \quad (1p)$$

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.