Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 11 februarie 2023

Clasa a VII-a

**Problema 1**

Fie $MNPQ$ un trapez cu $MN \parallel PQ$ și $MN = MQ = 2QP$. Dacă $O$ este mijlocul lui $QN$, $MO \cap NP = \{R\}$, $T$ este mijlocul lui $MR$ iar $S$ mijlocul lui $MN$, arătați că:

a) Punctele $Q$,$T$,$S$ sunt coliniare.

b) Triunghiul $MSO$ isoscel.

Barem de notare și evaluare:

Realizarea desenului.............................................................................(1p)

$TS$ linie mijlocie în triunghiul $MNR \rightarrow TS \parallel NR$ (1).........................................(1p)

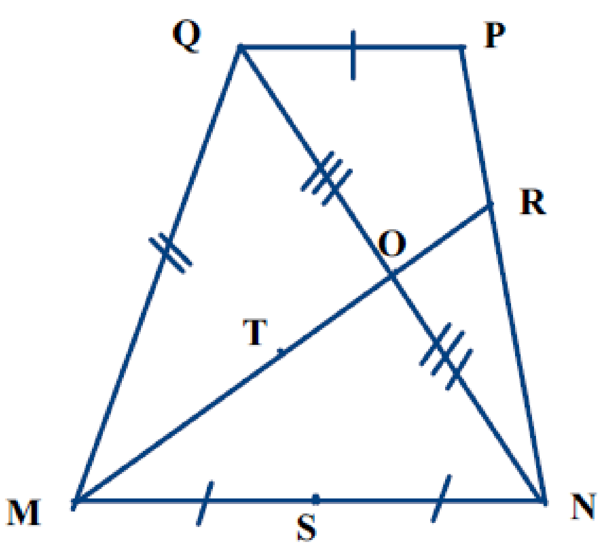
$QSNR$ paralelogram $\rightarrow QS \parallel NR$ (2)......................................................(1p)

Din (1) și (2) rezultă că punctele $Q$,$T$,$S$ sunt coliniare..................................(1p)

$OS$ linie mijlocie în triunghiul $MNQ$, $OS = \frac{MQ}{2} = \frac{MN}{2}$ (3)...............................(1p)

$S$ mijlocul lui MN $\rightarrow MS = \frac{MN}{2}$ (4) ..............................................................(1p)

din 3 si 4 $\rightarrow MS = OS \rightarrow triunghiul\ MSO - isoscel$ .(1p)



**Problema 2**

Se dă triunghiul $ABC$, dreptunghic în $B$, cu $E$ mijlocul segmentului $BC$, iar $D$ un punct pe latura $AC$, astfel încât $AD = 2 \cdot DC$ și $m\sphericalangle AED = 80°$. Calculați $m(\sphericalangle BAE)$.

Barem de notare și evaluare

Desen 1p

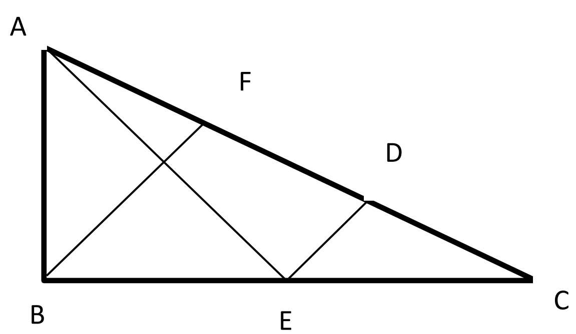
Fie F mijlocul lui AD, atunci DE este linie mijlocie în ΔBFC, deci $DE \parallel BF$. 1p

Fie $BF \cap AE = \{M\}$. Cum $DE \parallel BF$, vom obține MF linie mijlocie în ΔADE, deci M mijlocul lui AE, AM=ME. 1p

În ΔBAE dreptunghic în B, avem că BM este mediană, BM=AM=ME, 1p

deci ΔBAM este isoscel, cu $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle ABM$, iar $m\sphericalangle BME = 2m\sphericalangle BAE$, ca unghi exterior ΔABM. 2p

$DE \parallel BF$, cu secanta AE, implică $m\sphericalangle BME = 80°, deci\ m\sphericalangle BAE = 40°$. 1p



**Problema 3**

Arătați că:

$$\left[\sqrt{\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\cdots+\frac{296}{2023}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{289}\right)}\right]<7$$

unde $[x] = partea\ \text{î}ntreag\text{ă}\ a\ num\text{ă}rului\ x.$

Barem de notare și evaluare

Se observă faptul că $2023 = 7 \cdot 289$, deci putem să asociem fracțiile

$$\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\cdots+\frac{296}{2023}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{289}\right)$$
$$=\frac{8}{7}-1+\frac{9}{14}-\frac{1}{2}+\frac{10}{21}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{296}{2023}-\frac{1}{289}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2p$$

$$=\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\cdots\ldots.+\frac{1}{7}}_{289\ termeni}=\frac{289}{7}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..2p$$

$$\sqrt{\frac{289}{7}}\leq\sqrt{\frac{343}{7}}=7\rightarrow\left[\sqrt{\frac{289}{7}}\right]\leq 7\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3p$$

**Problema 4**

Determinați numărul natural $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, cu $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, știind că $5n$ are cu $20$ de divizori naturali mai mulți decât are $n$, $3n$ are cu $15$ divizori naturali mai mulți decât are $n$ și $2n$ are cu $12$ divizori naturali mai mulți decât are $n$ .

***Gazeta Matematică***

Barem de notare și evaluare

Dacă $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$,

atunci $2n = 2^{a+1} \cdot 3^b \cdot 5^c; 3n = 2^a \cdot 3^{b+1} \cdot 5^c; 5n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^{c+1}$ 1p

Din ipoteză : $(a+2)(b+1)(c+1) = 12 + (a+1)(b+1)(c+1)$

$\rightarrow (b+1)(c+1) = 12$ 2p

Similar, obținem $(a+1)(c+1) = 15$ și $(a+1)(b+1) = 20$ 1p

Pentru a determina soluțiile putem înmulți relațiile și obținem :

$[(a+1)(b+1)(c+1)]^2 = 3600 \rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 60 \ (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$ 2p

Finalizare: $a = 4; b = 3; c = 2 \rightarrow n = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$=10800. 1p