Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a IX- a

Problema 1

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x^2 \geq 2\sqrt{[x^2]\{x^2\}}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real a și $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a unui număr real a.

b) Să se rezolve ecuația $\boldsymbol{x^2 = 2\sqrt{[x^2] \cdot \{x^2\}}}$ **.**

Problema 2

Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1$, are proprietatea că $\sqrt{n} \cdot x_{n+1} = \sqrt{n+1} \cdot x_n - \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$, pentru orice n număr natural nenul. Să se arate că $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sqrt{n}$, pentru orice n număr natural nenul.

(Supliment Gazeta Matematică)

Problema 3

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că dacă $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Problema 4

Se consideră un triunghi ABC și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

***Notă* : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte**

Timp efectiv de lucru : 3 ore

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a X- a

Problema 1

Să se determine forma trigonometrică a numărului complex z cu modulul egal cu 1 și care verifică egalitatea $\arg(z^2+z)=\frac{\pi}{3}$.

Problema 2 Se consideră funcția crescătoare $:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x))=x^3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$

a) Arătați că funcția f este inversabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$ și $f^{-1}(1)$.

(Supliment Gazeta Matematică)

Problema 3

Rezolvaţi ecuaţia $x^{\log_5 3}+x=2+16\log_5 x$

(Gazeta Matematică)

Problema 4

Să se determine parametrul real m pentru care ecuaţia

$$\sqrt[3]{4^x+2^{x+1}+1}-(m+1)\cdot\sqrt[3]{2^x+1}+2m+1=0$$

are toate soluţiile reale.

Notă : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte

Timp efectiv de lucru : 3 ore

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XI- a

Problema 1

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1, a_1 = 2$ şi $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^3 + a_{n-1}^2}, \forall n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ unde $n \in \boldsymbol{N}^*$

Problema 2

a). Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{n - \cos(n^2 + 2023)}{n + \sin(n^3 + 2022)} = 1.$

b). Să se calculeze $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{3-x}}$.

Problema 3

Se consideră matricele $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = (A - I_2)^{31}$ şi $E = (A + I_2)^{21}$.

Dacă $det(A^{31} - 3A + B) = 0, det(A^{21} - 2A + C) = 0, detD = 0$ şi $det\ E = 0$, atunci să se calculeze suma pătratelor elementelor matricei A.

Problema 4

Se consideră matricele $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ şi $B = A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n + d_n)$.

Notă : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte

Timp efectiv de lucru : 3 ore

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XII- a

Problema 1

a) Calculaţi $\int (x^3+3x^2+6x+4)\sqrt{x^2+2x+4}dx$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $e^{f(x)} + 3f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Problema 2

Fie $a \in (0, \infty)$ şi $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie pară şi continuă. Să se arate că

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_{0}^{a} f(x)dx, \forall\, k \in \mathbb{R}$$

Problema 3

Se consideră mulţimea $G = (-1,1)$ şi legea de compoziţie $*$ pe G definită prin $* \, y = \frac{x+y}{1+xy}$.

a). Demonstraţi că funcţia $f: (-1,1) \to (0, \infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*\,,\ \cdot)$.

b). Să se arate că $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6} * \ldots * \frac{1}{2022} = \frac{2022}{2024}$

Problema 4

Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1} \frac{\left(e^{x\sqrt{2}}+1\right)^{-1}}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} + \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}} dx$$

Notă : Fiecare problemă se punctează de la 0 puncte la 7 puncte

Timp efectiv de lucru : 3 ore