Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a IX- a – Soluţii şi Barem de corectare

Problema 1

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x^2 \geq 2\sqrt{[x^2]\{x^2\}}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real a și $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a unui număr real a.

b) Să se rezolve ecuația $\boldsymbol{x^2 = 2\sqrt{[x^2] \cdot \{x^2\}}}$ **.**

Soluţie şi barem de corectare

a) $x^2 = [x^2] + \{x^2\}$. Deoarece $\{x^2\} \in [0;1)$ și cum $x^2 \geq 0$ avem $[\boldsymbol{x^2}] \in \mathbb{N}$**……………………...2p**

deci putem aplica inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică, astfel obținem $[x^2] + \{x^2\} \geq 2\sqrt{[x^2]\{x^2\}}$ ceea ce duce la $x^2 \geq 2\sqrt{[x^2]\{x^2\}}$ **…………………………….....1p**

b) Egalitate în inegalitatea de mai sus are loc pentru $[x^2] = \{x^2\}$ **………………………..…1p**

Cum $\{x^2\} \in [0;1)$ și $[\boldsymbol{x^2}] \in \mathbb{N}$, obținem că $[x^2] = \{x^2\} = 0$ ……………………………………**1p**

Rămâne că $x^2 = 0$, adică $x = 0$ este singura soluție……………………………………...**2p**

Problema 2

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1$, are proprietatea că $\sqrt{n} \cdot x_{n+1} = \sqrt{n+1} \cdot x_n - \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$, pentru orice număr natural nenul. Să se arate că $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sqrt{n}$ pentru orice număr natural nenul.

(Supliment Gazeta Matematică)

Soluţie şi barem de corectare

Folosind relaţia $\sqrt{n} \cdot x_{n+1} = \sqrt{n+1} \cdot x_n - \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$ şi ţinând cont de $x_1 = 1$ se arată că

$x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ pentru orice număr natural nenul (se demonstrează prin inducție matematică)**…………………………………………………………..…………………..4 p**

$x_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ şi $k = \overline{1,n}$ şi sumând relaţiile obţinute vom avea $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sqrt{n}$

pentru orice număr natural nenul**………………………………………………………………..3p**

Problema 3

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să se arate că dacă $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Soluţie şi barem de corectare

$AB=c, AC=b, BC=a, \overrightarrow{AI}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}, \overrightarrow{BI}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+b+c}, \overrightarrow{CI}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b+c}$**………………………..2 p**

Din $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ obţinem $(3b-4a)\overrightarrow{AB}+(3c-5a)\overrightarrow{AC}+(4c-5b)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$**……..2p**

Relaţie echivalentă cu $(8b-4a-4c)\overrightarrow{AB}+(7c-5a-5b)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ şi deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari, rezultă $b=\frac{4a}{3}$ şi $c=\frac{5a}{3}$**……………………………………………………..2p**

Folosind reciproca teoremei lui Pitagora, obţinem $m(\sphericalangle C)=90^o$**…………………………...……1p**

Problema 4

Se consideră un triunghi ABC și punctele $M\in(AB), N\in(BC), P\in(CA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

Soluție și barem de corectare

Se consideră $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ……………………………………………………………………….…**(3p)**

$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{GA}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{GB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{GC}$ și $\overrightarrow{GP}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{GC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{GA}$…………**(3p)**

Prin adunarea acestor relații se obține că $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, deci G este centrul de greutate și al triunghiului MNP ……………………………………………………………………...**(1p)**

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a X- a – Soluţii şi Barem de corectare

Problema 1

Să se determine forma trigonometrică a numărului complex z cu modulul egal cu 1 și care verifică egalitatea $\arg(z^2+z)=\frac{\pi}{3}$.

Soluție și barem de corectare $z=r(\cos t+i\sin t)$, $r=|z|=1$ și $t\in[0;2\pi)$

$z^2=(\cos 2t+i\sin 2t)$ **...1p**

Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A(z)$, $B(z^2)$ și $C(z^2+z)$, ceea ce înseamnă că $OACB$ este paralelogram cu $m(\sphericalangle AOB)=m(\sphericalangle xOB)-m(\sphericalangle xOA)=2t-t=t$ **.......................................1p**

Cum $OA=OB$ se obține că $OACB$ este romb, deci OC este bisectoarea unghiului AOB **..............2p**

$m(xOC)=m(xOA)+m(AOC)=t+\frac{t}{2}=\frac{3t}{2}$, deci $\arg(z^2+z)=\frac{3t}{2}$ **..................................1p**

Din $\arg(z^2+z)=\frac{\pi}{3}$ se obține că $\frac{3t}{2}=\frac{\pi}{3}$ **..1p**

$t=\frac{2\pi}{9}$ și $z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ **...1p**

Problema 2 Se consideră funcția crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x))=x^3$, pentru orice x real.

- **a)** Arătați că funcția f este inversabilă pe $\mathbb{R}$.
- **b)** Calculați $f^{-1}(-1), f^{-1}(0)$ și $f^{-1}(1)$.

(Supliment Gazeta Matematică)

Soluție și barem de corectare

a) Funcția crescătoare $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=x^3$ este bijectivă..**(1p)**
și din relația $f\circ f=g$ se deduce că funcția f este bijectivă, deci inversabilă.........**(2p)**

b) Din egalitatea $f(f(x)) = x^3$ se obține că $f(f(f(x))) = f(x^3)$ și $f(f(f(x))) = f^3(x)$, pentru orice x real
Deci $f^3(x) = f(x^3)$, pentru orice x real ……………………………………………...**(1p)**

Se obține $f^3(-1) = f(-1)$, $f^3(0) = f(0)$, $f^3(1) = f(1)$, ceea ce înseamnă că $f(-1), f(0), f(1)$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 = x$ ………………………………………………………………………..**(1p)**

$f(-1), f(0), f(1) \in \{-1, 0, 1\}$ și cum f este crescătoare și bijectivă se ajunge la $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$……………………………………………………………………**(1p)**

Deoarece f este inversabilă, se obține că $f^{-1}(-1) = -1, f^{-1}(0) = 0, f^{-1}(1) = 1$...........................(1p)

<u>Problema 3</u> Rezolvaţi ecuaţia $x^{\log_5 3} + x = 2 + 16\log_5 x$

(Gazeta Matematică)

<u>Soluţie şi barem de corectare</u>

Pentru $x > 0$ ecuaţia este echivalentă cu $3^{\log_5 x} + 5^{\log_5 x} = 2 + 16\log_5 x$**……………………..….2p**

Fie $t = \log_5 x$. Obţinem $3^t + 5^t = 2+16t$**……………………………………………………..2p**

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = 3^t + 5^t$ este strict convexă pe $\mathbb{R}$ ca o sumă de funcţii strict convexe, deci ecuaţia $f(t) = 2 + 16t$ are cel mult două soluţii, $t = 0, t = 2$. Rezultă că $x = 1$ şi

$x = 25$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei date**…………………………………….............3p**

<u>Problema</u> 4 Să se determine parametrul real m pentru care ecuaţia

$\sqrt[3]{4^x + 2^{x+1} + 1} - (m+1)\cdot\sqrt[3]{2^x + 1} + 2m + 1 = 0$ are toate soluţiile reale.

<u>Soluţie şi barem de corectare</u>

Dacă $y = \sqrt[3]{2^x + 1} > 1$, oricare ar fi x număr real, atunci ecuaţia se scrie

$y^2 - (m+1)y + 2m + 1 = 0$**…………………………………………………………….…1p**

Ecuaţia în x are toate soluţiile reale dacă ecuaţia în y are ambele soluţii mai mari decât 1...…..**1p**

Din condiţiile $\Delta \geq 0, y_1 > 1, y_2 > 1$ şi ţinând cont că două numere sunt strict pozitive dacă şi numai dacă suma şi produsul lor sunt strict pozitive, obţinem $m^2 - 6m - 3 \geq 0$,

$y_1 + y_2 - 2 > 0$ şi $(y_1 - 1)(y_2 - 1) > 0$……………………………………………………....**1p**

După rezolvarea inecuaţiilor obţinem $m \in [3 + 2\sqrt{3}, \infty)$**……………………………………....4p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XI - a – Soluţii şi Barem de corectare

Problema 1

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1, a_1=2$ şi $a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n^3+a_{n-1}^2}, \forall n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie şi barem de corectare

Se arată prin inducţie matematică $a_n\geq 1, \forall n\in\mathbb{N}$ ……………………………………..........…**0,5p**

Se observă că $\sqrt[3]{a_n^3+a_{n-1}^2}>a_n, \forall n\geq 1$, deci $a_{n+1}>a_n, \forall n\geq 0$, adică şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător………………………………………………………………………………….**0,5p**

Din relaţia de recurenţă obţinem $a_{k+1}^3-a_k^3=a_{k-1}^2$, pentru $\forall k\geq 1$,de unde rezultă

$a_{k+1}^3-a_k^3\geq 1, \ \forall k\geq 1$ ………………………………………………………………......**1p**

Prin însumare după k avem $a_n^3\geq n-1+a_1^3$, adică $a_n\geq\sqrt[3]{n+7}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ ……………...**1p**

Se arată că $a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n^3+a_{n-1}^2}<a_n+1$ ……………………………………………………….…**1p**

dar $a_{n+1}>a_n, \ \forall n\in\mathbb{N}$ şi din $1<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{1}{a_n}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ …………………………..…**1p**

Deoarece $a_{n+1}^3-a_n^3=a_{n-1}^2$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}^2}{a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2}{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\frac{a_{n+1}}{a_n}+1}=\frac{1}{3}$$ ……………....................................**1p**

Folosind lema Stolz-Cesaro obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{3}$ ………………………………………….…………**1p**

Problema 2

a). Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{n-\cos(n^2+2023)}{n+\sin(n^3+2022)} = 1$; **b)**. Să se calculeze $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{3-x}}$.

Soluție și barem de corectare

a). Scrie că -1≤ $\sin(n^3 + 2022) \leq 1$, -1≤ $\cos(n^2 + 2023) \leq 1$ **... 1p**

Argumentează că : $\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n-\cos(n^2+2023)}{n+\sin(n^3+2022)} \leq \frac{n+1}{n-1}$ **..1p**

Concluzionează folosind criteriul cleștelui că limita este 1 **... 1p**

b) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{3-x}} = \lim_{x\to 4} \frac{-\sqrt[3]{5-x}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{x\to 4} \frac{\left\{[1+(x-4)]^{\frac{1}{2}}-1\right\}-\left\{[1+(4-x)]^{\frac{1}{3}}-1\right\}}{\left\{[1+(4-x)]^{\frac{1}{2}}-1\right\}-\left\{[1+(x-4)]^{\frac{1}{3}}-1\right\}} =$**...............1p**

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left\{\frac{[1+(x-4)]^{\frac{1}{2}}-1}{x-4}+\frac{[1+(4-x)]^{\frac{1}{3}}-1}{4-x}\right\}}{(x-4)\left\{-\frac{[1+(4-x)]^{\frac{1}{2}}-1}{4-x}-\frac{[1+(x-4)]^{\frac{1}{3}}-1}{x-4}\right\}} = \cdots \ldots \ldots (\boldsymbol{1p}) = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{[1+(x-4)]^{\frac{1}{2}}-1}{x-4}+\frac{[1+(4-x)]^{\frac{1}{3}}-1}{4-x}}{-\frac{[1+(4-x)]^{\frac{1}{2}}-1}{4-x}-\frac{[1+(x-4)]^{\frac{1}{3}}-1}{x-4}} =$$ **........1p**

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{1p}$$

Problema 3

Se consideră matricele $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = (A - I_2)^{31} \text{ şi } E = (A + I_2)^{21}.$$

Dacă $det(A^{31} - 3A + B) = 0$, $det(A^{21} - 2A + C) = 0$, $detD = 0$ $şi$ $det\ E = 0$, atunci să se calculeze suma pătratelor elementelor matricei A.

Soluție și barem de corectare

Avem $detD = det(A - I_2)^{31} = (\det(A - I_2))^{31} = 0$ implică $(x-1)(t-1) - yz = 0$**…....1p**

Avem $det\ E = 0 \leftrightarrow \det(A + I_2) = 0 \leftrightarrow (x+1)(t+1) - yz = 0$**…………………………...1p**

Rezultă că $t = -x$ și $x^2 + yz = 1$ (*)**...1p**

$A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & x^2+yz \end{pmatrix} = I_2, deci\ A^{21} = A\ și\ \ A^{31} = A\ (**)$**……1p**

Utilizând $det(A^{31} - 3A + B) = 0,\ det(A^{21} - 2A + C) = 0$ şi ţinând cont de (**) obţinem

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{3}{2}$ $și\ t = -\frac{1}{2}$, care au suma pătratelor egală cu 3**……………………….……3p**

Problema 4

Se consideră matricele $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ şi $B = A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n + d_n)$.

<u>Soluţie şi barem de corectare</u>

Scriem matricea A sub forma $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{4} & sin\frac{\pi}{4} \\ -sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$**……………………………………..1p**

Prin inducţie se arată că $A^n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} cos\frac{n\pi}{4} & sin\frac{n\pi}{4} \\ -sin\frac{n\pi}{4} & cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$ $, oricare\ ar\ fi\ n \in \mathbb{N}^*$**………......…...3 p**

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3^n}cos\frac{n\pi}{4}, b_n = \frac{1}{3^n}sin\frac{n\pi}{4}\ \ , c_n = -\frac{1}{3^n}sin\frac{n\pi}{4}\ , d_n = \frac{1}{3^n}cos\frac{n\pi}{4}$

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$ şi cos $\frac{n\pi}{4}$, $sin\frac{n\pi}{4}$ sunt mărginite $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n + d_n) = 0$**………3p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Faza locală - 11 februarie 2023

Clasa a XII - a – Soluţii şi Barem de corectare

Problema 1

a) Calculaţi $\int (x^3+3x^2+6x+4)\sqrt{x^2+2x+4}dx$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $e^{f(x)}+3f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluţie şi barem de corectare

a) $\int (x^3+3x^2+6x+4)\sqrt{x^2+2x+4}dx = \int (x+1)\left(x^2+2x+4\right)\sqrt{x^2+2x+4}dx$ **……………………2p**

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}+c=\frac{1}{5}\left(x^2+2x+4\right)^{\frac{5}{2}}+c$ **……………………………………………..…1p**

b) Considerăm funcţia $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x)=e^x+3x$. Din ipoteză obţinem $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$**…………………..1p**

$g'(x)=e^x+3>0, \forall x \in \mathbb{R}$, g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci g este injectivă**…………………….……...1p**

Cum g estecontinuă, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ şi $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ obţinem $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci g este surjectivă**………………………………………………………...……………………………………...1p**

g bijectivă, $f=g^{-1}$, g continuă pe $\mathbb{R}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ ……………………………………………………………………….1p

Problema 2

Fie $a \in (0,\infty)$ şi $f:[-a,a] \to \mathbb{R}$ o funcţie pară şi continuă. Să se arate că

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx = \int_{0}^{a} f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$$

Soluţie şi barem de corectare

$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx$..**2p**

$x=-t$..**1p**

$\Rightarrow\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{-kt}}dt=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{-kt}}dt=\int_{0}^{a}\frac{e^{kt}f(t)}{1+e^{kt}}dt=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}f(x)}{1+e^{kx}}dx$..............**2p**

$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx,\forall\, k\in\mathbb{R}$.............................**2p**

Problema 3

Se consideră mulţimea $G=(-1,1)$ şi legea de compoziţie $*$ pe G definită prin $*\ y=\frac{x+y}{1+xy}$.

a). Demonstraţi că funcţia $f:(-1,1)\to(0,\infty), f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ este izomorfism de la grupul $(G,*)$

la grupul $(\mathbb{R}_+^*\ ,\ \cdot)$.

b). Să se arate că $\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{6}*\ldots*\frac{1}{2022}=\frac{2022}{2024}$

<u>Soluţie şi barem de corectare</u>

a). $f(x*y)=\frac{1-x*y}{1+x*y}=\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}=f(x)\cdot f(y),\forall x,y$ numere reale din $(-1,1)$**(1)….1p**

Se demonstrează că funcţia f este bijectivă**(2)**...**1p**

Din (1) şi (2), obţinem că funcţia f este izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*\ ,\ \cdot)$..................**1p**

b). Se demonstrează prin inducţie că $f(x_1*x_2*\ldots*x_n)=f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$,

$\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$ şi $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$...**2p**

$f\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{6}*\ldots*\frac{1}{2022}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)\ldots f\left(\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2023}=\frac{1}{2023}$..........................**1p**

f este bijectivă$\Rightarrow f$ *este inversabilă* $\Rightarrow\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{6}*\ldots*\frac{1}{2022}=f^{-1}\left(\frac{1}{2023}\right)=\frac{1-\frac{1}{2023}}{1+\frac{1}{2023}}=\frac{2022}{2024}$..............**1p**

Problema 4 Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1}\frac{\left(e^{x\sqrt{2}}+1\right)^{-1}}{\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}}dx$$

<u>Soluţie şi barem de corectare</u>

Se arată că funcţia $f:[-1,1]\to \mathbf{R}, \boldsymbol{f(x)}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{-x}+(\sqrt{2}+1)^{-x}}$ este funcţie pară…………**1p**

Dacă $a\in(0,\infty)$ $și$ $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ este o funcţie pară şi continuă, atunci

$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx, \forall\, k\in\mathbb{R}$…………………………………………………**2p**

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{\left(e^{x\sqrt{2}}+1\right)^{-1}}{(\sqrt{2}-1)^{-x}+(\sqrt{2}+1)^{-x}}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{-x}+(\sqrt{2}+1)^{-x}}dx=\cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \mathbf{2p}$$

$=\int_{0}^{1}\frac{(\sqrt{2}+1)^{x}}{(\sqrt{2}+1)^{2x}+1}dx=\frac{1}{ln(\sqrt{2}+1)}arctg(\sqrt{2}+1)^{x}/_{0}^{1}=\frac{1}{ln(\sqrt{2}+1)}\left(arctg(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}\right)$…………**2p**