Olimpiada de Matematică -faza locală-Vaslui

11 Februarie 2023

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Să se arate că numărul n = $\sqrt{2020 \cdot 2022 \cdot 2024 \cdot 2026 + 16} + 5$ este pătratul unui număr natural.

Soluție: n = $\sqrt{2020 \cdot 2022 \cdot 2024 \cdot 2026 + 16} + 5 =$

$= \sqrt{a \cdot (a+2) \cdot (a+4) \cdot (a+6) + 16} + 5$ **(2p)**

$= \sqrt{(a^2+6a) \cdot (a^2+6a+8) + 16} + 5$ **(2p)**

$= \sqrt{(a^2+6a+4)^2} + 5$ **(2p)**

$= a^2 + 6a + 4 + 5 = (a+3)^2 = 2023^2$ **(1p)**,

unde a= 2020.

Problema 2.

a) Dacă înălţimile din A şi, respectiv B ale tetraedrului $ABCD$ sunt concurente, atunci să se demonstreze că şi înălţimile din C şi D ale tetraedrului $ABCD$ sunt concurente.

b) Perpendiculara din A' pe planul (ACD) şi înălţimea din A a piramidei triunghiulare regulate $ABCD$ formează un unghi x. Ştiind că A' aparține planului (BCD) , $AA' \perp (BCD), AC = 10cm$ și $BC = 12\ cm$, atunci calculaţi $cos\ x$.

Soluție: Avem $AA' \cap BB' = \{T\} \Rightarrow AA'$ și BB' sunt înălțimi în triunghiul ABM , unde $(AA', BB') \cap DC = \{M\}, T\ ortocentrul\ tr. ABM, deci\ MT \perp AB$(**1p**)

$$\begin{cases} AB \subset (BCD), AA' \perp CD \\ CD \subset (ACD), BB' \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp (AA', BB') \\ AB \subset (AA', BB') \end{cases} \Rightarrow CD \perp AB;\textbf{(1p)}$$

$$\begin{cases} AB \perp MT \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CTD)$$

$Avem\ CC'$-înălțime în tetraedru, $\begin{cases} CC' \perp (ABD) \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow CC' \perp AB$, Analog $DD' \perp AB$,

AB$\perp CD$. **(1p)**

Cum există un singur plan ce conține dreapta CD, perpendicular pe AB

$\Rightarrow CC'$, CD și DD' coplanare $\Rightarrow$ CC' și DD' concurente.**(1p)**

$b)$ Considerăm M – mijlocul segmentului $[CD]$

Fie $\begin{cases} A'P \perp (ADC) \\ (ABM) \perp (ADC) \\ (ABM) \cap (ADC) = AM \end{cases} \Longrightarrow A'P \perp AM$**(1p).**

Avem $A'M = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC\sqrt{3}}{2}$, $A'M = 2\sqrt{3}$ cm.**(1p)**

Tr. AMD este drept. în M, cf. T.Pit. $AM^2 = AD^2 - MD^2$ ⟹AM = 8 cm. Analog tr. $AA'M$ $drept.$ în A', se obț. AA'=2 $\sqrt{13}$ cm. De unde $A'P = \frac{AA' \cdot A'M}{AM} \Longrightarrow A'P = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

Obț. $\cos(\sphericalangle(AA'P)) = \frac{A'P}{AA'} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.**(1p)**

Problema 3.

Să se demonstreze că numărul a= $4n^2 + \left[\sqrt{9n^2 + 4n}\right] + \left[\sqrt{n^2 + 3n + 2}\right]$, n∈ ℕ, este pătrat perfect(s-a notat cu [x]- partea întreagă a numărului x).

Soluție: Avem: $\sqrt{9n^2 + 4n} > \sqrt{9n^2} = 3n$. **(1p)**

Pe de altă parte $\sqrt{9n^2 + 4n} < \sqrt{9n^2 + 6n + 1} = 3n + 1$ **(1p)**.

Avem 3n< $\left[\sqrt{9n^2 + 4n}\right] < 3n + 1$ deci $\left[\sqrt{9n^2 + 4n}\right] = 3n$**(1p)**.

De asemenea avem: $\sqrt{n^2 + 3n + 2}$ =$\sqrt{(n+1)(n+2)}$**(1p),**

de unde n+1≤ $\sqrt{(n+1)^2} < \sqrt{(n+1)(n+2)} < \sqrt{(n+2)^2} \leq n + 2$**(1p)**.

Deci $\left[\sqrt{n^2 + 3n + 2}\right] = n$+1**(1p)**.

Obținem a= $4n^2 + 3n + n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$. Deci a este pătrat perfect**(1p)**.

Problema 4.

Pe planul triunghiului BCD se ridică perpendiculara AB. Fie E și F centrele cercurilor înscrise în triunghiul ABC, respectiv ABD. Știind că EF∥ (BCD), demonstrați că triunghiurile ACD și BCD sunt isoscele.

(G.M.11/2022-enunț modificat)

Soluție: $\begin{cases} \text{EF} \parallel \text{(BCD)} \\ (AEF) \cap (BCD) = \{MN\} \end{cases} \Longrightarrow EF \parallel MN$ **(1p)**;

Fie (BE bis $\sphericalangle ABC$, aplic. T.bis în tr. ABM: $\frac{AB}{BM} = \frac{AE}{EM}$ (1) **(1p)**

Fie (BF bis. $\sphericalangle ABD$, aplic. T. Bis. În tr. ABN: $\frac{AB}{BN} = \frac{AF}{FN}$ (2) **(1p)**.

Aplic T.Th. în tr. AMN, unde $EF \parallel MN \Longrightarrow \frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FN}$ (3) **(1p)**.

Din (1)+(2)+(3) obț. (BM) ≡ (BN) **(1p)**.

Obț. $\Delta\, ABM \equiv \Delta\, ABN$ (C.C.) ⟹ $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BAN$ **(0,5p)**

și apoi $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, ABD$ (C.U.) **(0,5p)**

deci (BC) ≡ (BD) și (AC) ≡ (AD). De unde, triunghiurile ACD și BCD sunt isoscele.**(1p)**