



Olimpiada Națională de Matematică  
Etapa locală – Vaslui, 11 februarie 2023  
Clasa a V-a

**Problema 1.**

a) Arătați că numărul:

$$A = 2023 + 2022 \cdot 2023 \text{ este pătrat perfect}$$

b) Arătați că numărul:

$$B = A + 2022 \cdot 2023^2 \text{ este cub perfect}$$

c) Arătați că numărul:

$$C = 2023 + 2022 \cdot 2023 + 2022 \cdot 2023^2 + 2022 \cdot 2023^3 + \dots + 2022 \cdot 2023^{2021}$$

este și pătrat perfect, și cub perfect.

Barem de notare și evaluare

a.  $A = 2023(1 + 2022) = 2023 \cdot 2023 = 2023^2$  2p

b.  $B = 2023^2 + 2022 \cdot 2023^2 = 2023^2(1 + 2022) = 2023^3$  2p

c.  $C = 2023^{2022} = (2023^{1011})^2 = (2023^{674})^3$  3p

**Problema 2.** Suma a patru numere naturale este 2023. Al doilea număr se obține tăind ultima cifră a primului număr, al treilea se obține tăind prima cifră a celui de-al doilea număr, iar al patrulea se obține tăind ultima cifră a celui de-al treilea număr.

a) Determinați cele patru numere.

b) Arătați că produsul celor patru numere nu este pătrat perfect.

Barem de notare și evaluare

a)  $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{bc} + b = 2023,$  0,5p

$1100 \cdot a + 121 \cdot b + 12 \cdot c + d = 2023,$  1p

*Dacă  $a \geq 2, 2200 > 2023$ , imposibil și cum  $a \neq 0$ , avem  $a = 1$ ,* 0,5p

$121 \cdot b + 12 \cdot c + d = 923$ , și cum  $12 \cdot c + d \leq 117$ , avem  $b \geq 7$ , 1p

*Dacă  $b \geq 8$ , atunci  $121 \cdot b \geq 968$ , imposibil, deci  $b = 7$ ,* 0,5p

$12 \cdot c + d = 76$ , de unde  $c = 6, d = 4$ , 1p

*Prin urmare numerele sunt : 1764; 176; 76; 7 ,* 0,5p

b)  $U(1764 \cdot 176 \cdot 76 \cdot 7) = 8$ , deci produsul celor patru numere nu este pătrat perfect. 2p



**Problema 3.** Se consideră  $n$  numere naturale consecutive. Suma resturilor împărțirii celor  $n$  numere la 9 este 2023. Aflați valorile posibile ale lui  $n$ .

Barem de notare și evaluare

Pentru că avem numere naturale consecutive, vom avea resturi consecutive. 1p

Împărțitorul este 9, deci resturile pot fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 care au suma 36 2p

Dar,  $2023 = 36 \cdot 56 + 7$ , deci vom avea 56 de secvențe cu resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și apoi câteva numere din cea de-a 57 secvență cu suma resturilor 7 1p

$7 = 3 + 4$  (sumă de resturi consecutive) 1p

Dacă a 57-a secvență cuprinde resturile 3 și 4, atunci  $n = 57 \cdot 9 + 2 = 515$  1p

Dacă a 57-a secvență cuprinde restul 7, atunci  $n = 57 \cdot 9 + 1 = 514$ . 1p

**Problema 4.** Ana cumpără 5 cărți, 2 caiete și 3 penare pentru care plătește 215 lei. Mihai cumpără 9 cărți și 5 penare și plătește 345 lei. George cumpără 6 caiete și 8 penare și plătește 180 lei. Toți cumpără același tip de cărți, caiete, respectiv penare. Aflați cât costă în total o carte, un caiet și un penar de acest tip.

**Gazeta Matematică - enunț modificat**

Notăm cu  $a$  – prețul unei cărți, cu  $b$  – prețul unui caiet,  $c$  – prețul unui penar

$$5a + 2b + 3c = 215;$$

$$9a + 5c = 345;$$

$$6b + 8c = 180 \text{ (sau } 3b + 4c = 90) \quad 2p$$

Înmulțind prima relație cu 9, a doua relație cu 5, avem conform metodei comparației că

$$18b + 2c = 210, \text{ sau } 9b + c = 105 \text{ și cum } 3b + 4c = 90 \rightarrow 9b + 12c = 270 \quad 2p$$

$$\text{Deci } 11c = 165 \rightarrow c = 15 \quad 2p$$

$$a = 30, b = 10 \text{ și în final } a + b + c = 55 \quad 1p$$