

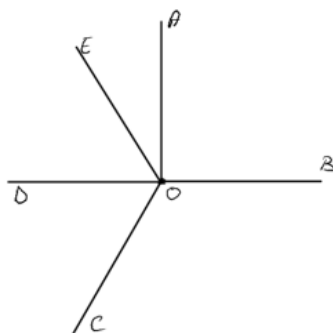
Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 11 februarie 2023
Clasa a VI-a

Problema 1. Fie $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ și $\angle EOA$, 5 unghiuri în jurul unui punct. Unghiurile $\angle EOC$ și $\angle BOC$ au măsurile egale, OD este bisectoarea unghiului $\angle EOC$, unghiul $\angle EOD$ este dublul unghiului $\angle EOA$, iar $\angle AOB \equiv \angle AOD$.

- Calculați măsurile fiecărui unghi și desenați figura.
- Calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\angle AOE$ și $\angle BOC$.

Barem de notare și evaluare

- Dacă $\angle BOC = \angle EOC = x^0 \rightarrow \angle EOD = \angle DOC = \frac{x^0}{2}$, $\angle AOE = \frac{x^0}{4}$ și $\angle AOB = \frac{3x^0}{4}$ (1p)
 $\frac{3x^0}{4} + \frac{x^0}{4} + 2x^0 = 360^0 \rightarrow x^0 = 120^0$ (2p)
 $\angle AOB = 90^0$, $\angle BOC = 120^0$, $\angle COD = 60^0$, $\angle DOE = 60^0$, $\angle EOA = 30^0$...(1p)
 Desen.....(1p)



- Dacă OM este bisectoarea unghiului $\angle AOE$ și ON este bisectoarea unghiului $\angle BOC$, atunci $\angle MON = \angle MOA + \angle AOB + \angle BON = 165^0$ (2p)

Problema 2. Să se determine numerele prime x, y, z știind că :

$$(x + 3y - 4z) \cdot (8x - 36) = (2x - 3y + 4z) \cdot (36 - 5x)$$

Barem de notare și evaluare

$$\frac{x + 3y - 4z}{36 - 5x} = \frac{2x - 3y + 4z}{8x - 36} = \frac{x + 3y - 4z + 2x - 3y + 4z}{36 - 5x + 8x - 36} = \frac{3x}{3x} = 1 \dots (3p)$$

$$x + 3y - 4z = 36 - 5x \Leftrightarrow 6x + 3y - 4z = 36 \dots \dots \dots (1p)$$

Cum $6x : 3; 3y : 3; 36 : 3$, atunci $4z : 3$ și cum $3 \nmid 4$, atunci $z : 3 \dots \dots \dots (1p)$

Dar z – prim, deci $z = 3$ și $2x + y = 16$. (1p)

$y = 2; x = 7$ (1p)

Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 2023\}$

a) Determinați cardinalul mulțimii $B = \{x \in A | x : 21\}$

b) Determinați cardinalul mulțimii $C = \{x \in A | x : 21 \text{ sau } x : 35\}$

Barem de notare și evaluare

a) $B = \{21 \cdot 1; 21 \cdot 2; \dots \dots \dots 21 \cdot 96\}$, deci $\text{card } B = 96$ (2p)

b) Fie $D = \{x \in A | x : 35\}$. Atunci $D = \{35 \cdot 1; 35 \cdot 2; \dots \dots \dots 35 \cdot 57\}$,
deci $\text{card } D = 57$ (1p)

Cum

$$C = B \cup D \rightarrow \text{card } C = \text{card } (B \cup D) = \text{card } B + \text{card } D - \text{card } (B \cap D) \quad (2p)$$

Cum $[21; 35] = 105$, avem $\text{card } (B \cap D) = 19$. (1p)

Finalizare, $\text{card } C = 96 + 57 - 19 = 134$ (1p)

Problema 4. Se consideră numărul $N = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}$.

a) Arătați că N se divide cu 13.

b) Determinați numărul perechilor (x, y) de numere naturale pentru care :

$$x^y = 2 \cdot N + 3.$$

Gazeta Matematică – enunț modificat

Barem de notare și evaluare

$$\begin{aligned} \text{a) } N &= (3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6) \dots + (3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022}) \\ &= 3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{2020} \cdot (1 + 3 + 3^2) & 1\text{p} \\ &= 13 \cdot (3 + 3^4 + \dots + 3^{2020}) \rightarrow N : 13 & 1\text{p} \\ \text{b) } 3N &= 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} & 0,5\text{p} \\ 3N - N &= 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2022}) & 0,5\text{p} \\ 2N &= 3^{2023} - 3 & 0,5\text{p} \\ \text{Deci } x^y &= 2 \cdot N + 3 = 3^{2023} & 0,5\text{p} \\ \text{Cum } 2023 &= 7 \cdot 17^2 & 1\text{p} \\ \rightarrow \text{numărul de divizori al numărului } 2023 &= (1 + 1)(2 + 1) = 6 & 1\text{p} \\ \text{În concluzie sunt 6 perechi } (x, y) &\text{care verifică relația.} & 1\text{p} \end{aligned}$$