Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a X-a

Problema 1. a) Să se determine partea întreagă a numărului $x = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$.

b) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x) = [x] + x$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.

Problema 2. Fie $a > 0$ şi $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie care verifică relaţia :

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că funcția f este periodică.

Problema 3. a) Fie $x, y, z > 0$. Demonstrați că:

$$\frac{x^3+y^3}{z^2} + \frac{y^3+z^3}{x^2} + \frac{z^3+x^3}{y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 6$$

(***)

b) Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$. Să se arate că :

$$\frac{a^3(a+1)}{a+bc} + \frac{b^3(b+1)}{b+ca} + \frac{c^3(c+1)}{c+ab} \geq \frac{1}{3}$$

Gazeta matematică

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}, n > 2$, ecuația $x^n + 2018x + 1 = 0$ și $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ soluție a acestei ecuații.
Demonstrați că $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$.

Notă: ***Timpul de lucru este de 3 ore.***
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a IX-a

Problema 1.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+3}{2}}\right] = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$.

Problema 2.

Fie triunghiul ABC cu centrul de greutate G. Punctele M, N și P sunt simetricele punctelor A, B și C în raport cu B, C și respectiv A.

a) Demonstrați că $3 \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CB} = 4 \cdot \overrightarrow{BA}$
b) Dacă centrul de greutate al triunghiului MNP coincide cu ortocentrul triunghiului ABC, demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.

Problema 3.

Numerele reale $a, b, c > 0$ verifică relația $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 3.$

Demonstrați că $\frac{a^2+b^2}{a+b+1} + \frac{b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{c^2+a^2}{c+a+1} \geq \frac{6 \cdot a \cdot b \cdot c+6}{a+b+c+3}$.

Gazeta matematică

Problema 4.

Fie numerele $x, y, z \in [-1,1] \setminus \{0\}$, oricare două diferite, care verifică egalitățile $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ definim numerele $a_n = \frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{x^n+y^n+z^n}$ și $S_n = [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]$. Demonstrați că $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leq S_n \leq 2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Notă: ***Timpul de lucru este de 3 ore.***
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a XI-a

Problema 1.

Se dau matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea $A \cdot B = O_n$. Arătați că

a) $det(B^2 + I_n) \geq 0$;
b) $det(A^2 + A + 2I_n) \geq 0$;
c) $det(A^2 + A + 2I_n + 2B^2) \geq 0$.

Problema 2.

Se dă șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ definit prin $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \in N^*$. Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$$

Problema 3.

Se consideră o mulțime $G \subset M_2(R)$ cu proprietățile:

P_1: Pentru orice $A, B \in G$ avem $A + B \in G$;
P_2: Pentru orice $A \in M_2(R)$ cu proprietatea $Tr\left({}^tA \cdot A\right) = 1$, avem $A \in G$.
Să se demonstreze că $G = M_2(R)$.

Gazeta matematică

Problema 4.

Fie șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ definit prin $x_1 = 1, x_2 = 2$ și $nx_{n+1} + (n-1)x_{n-1} = (2n-1)x_n, \forall n \geq 2, n \in \mathrm{N}$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n \cdot \cos\frac{1}{n}}$.

Notă: ***Timpul de lucru este de 3 ore.***
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a XII-a

Problema 1. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+6x & 9x\\ -2x & 1-3x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right\}$.

a) Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(3xy+x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) Demonstraţi că G este grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor pătratice de ordinul 2.

c) Arătaţi că grupurile $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$ şi $\left(G,\cdot\right)$ sunt izomorfe.

Problema 2. Fie $\left(G,\cdot\right)$ un grup cu proprietatea că există o funcţie injectivă $f:G\to G$, astfel încât $f(x^4\cdot f(y))=x^3\cdot f\left(x^3\cdot y\right), \forall x,y\in G.$. Să se arate că $\left(G,\cdot\right)$ este grup abelian.

Problema 3. Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu $f(0)=0$ care admite o primitivă F cu proprietatea $x+F(x)=\left(1+x\right)\cdot f(x),\ \forall x\in\left(-1;\infty\right)$. Arătaţi că numărul $f(e-1)$ este întreg.

Gazeta matematică

Problema 4.

a) Calculaţi $\int(9^x-9^{-x})\sqrt{3^x+3^{-x}}\,dx$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $f^5\left(x\right)+f\left(x\right)=x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Notă: ***Timpul de lucru este de 3 ore.***
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.