Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\sqrt{20172018^2+40344037} \in \mathbb{N}$.

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2-b^2=3ab$. Să se arate că

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{6b}{a}-\frac{6a}{b}+23}$$ este număr natural pătrat perfect.

c) Să se arate că $\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}$ este număr natural impar oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BC'}=\frac{CC'}{CD'}$.

Dacă distanţa dintre dreptele AB' şi CD' este egală cu 8cm, atunci să se calculeze aria triunghiului ACD'.

Problema 3.

Fie numerele reale $x, y, z \geq 1$ astfel încât $x+y+z=6$. Arătaţi că

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Gazeta matematică

Problema 4.

Triunghiul ABC are $AB = AC = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm şi O este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Pe planul triunghiului ABC se construiesc perpendicularele AM şi ON astfel încât $ON = AM = 8$ cm. Să se demonstreze că $\frac{d(M,BC)+d(N,BC)}{MN} \geq 1$.

Notă: ***Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.***
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVI-a

Problema 1.

Determinați numerele naturale nenule a, b, x, y astfel încât $(a,b)=2^{x+y}$ și $a+b=12$. Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Gazeta matematică

Problema 2.

Arătați că fracția $\dfrac{2018^{2018}-2018^{2017}-2018^{2016}}{2017^{2018}-2017^{2017}-2017^{2016}-1}$ este reductibilă.

Problema 3.

Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle$AOB și semidreapta [OC opusă semidreptei [OA. Știind că în semiplanul determinat de dreapta OA și în care se află semidreapta [OB, se duc $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$ și că măsura $\sphericalangle$AOB este o treime din măsura $\sphericalangle$NOC, iar [OP este bisectoarea $\sphericalangle$AON, se cere:

a) Aflați măsura unghiurilor $\sphericalangle$AOB și $\sphericalangle$COP;

b) Demonstrați că [OP este bisectoarea $\sphericalangle$BOM.

Problema 4.

Fie C și D două puncte situate de o parte și de alta a segmentului [AB] astfel încât [AC]≡[BC] și [AD]≡[BD]. Dacă DA∩BC={M} și DB∩AC={N} demonstrați că:

a) $\sphericalangle$MAC≡$\sphericalangle$NBC;

b) [AM]≡[BN].

<u>**Notă**</u>: ***Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.***
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018

Clasa aVII-a

Problema 1.

Fie numerele a, b, c, d $\in \mathbf{R}_+$ astfel încât $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$. Să se demonstreze că $E \in \boldsymbol{N}$ unde

$$E = \frac{2018+a}{1+a+ab+abc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018+c}{1+c+cd+cda} + \frac{2018+d}{1+d+da+dab}$$

Problema 2.

a) Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, scris în sistemul de numerație zecimal,dacă $\sqrt{\overline{aabba}} = \overline{aab} - b - a$.

b) Fie $E_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Să se determine $n \leq 15$ pentru care $E_n \in \boldsymbol{Q}$.

Problema 3.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC. Perpendicularele în A pe AB, respectiv AC intersectează dreapta BC în E respectiv în E, respectiv F. Dacă $EN \perp AC, N \in AC$, $FM \perp AB, M \in AB$ și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

a) AEPF și ABPC sunt romburi.

b) MNST este dreptunghi, unde {T}=PB $\cap$ AF și {S}=PC $\cap$ AE.

Gazeta matematică

Problema 4.

Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC, se duce paralela la mediana AM, M $\in$ (BC), care intersectează dreptele AB și AC, în E și respectiv F. Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$;

b) DE + DF este constantă.

<u>**Notă**</u>: ***Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.***
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aV-a

Problema 1. Se dau numerele:

$$a=\left[2+2^2\cdot 2^{24}+2^{95}:2^{14}+2\cdot\left(3^2\right)^{25}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1^{300}-2+3^{16}$$

$$b=2^{70}-\left\{2^3\cdot 1111_{(2)}-5\cdot\left[5-\left(10^4-9375\right):5^3\right]:9^{1994}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$$

a) Arătați că **a** este pătrat perfect și **b** nu este pătrat perfect;
b) Comparați numerele date.

Problema 2.

Într-o școală, numărul elevilor de clasa a V-a, este cuprins între cel mai mic număr natural de trei cifre distincte şi cel mai mic număr natural de trei cifre identice. Un sfert dintre aceştia participă la corul şcolii și a noua parte dintre elevi frecventează cercul de matematică.

Câţi elevi de clasa a V-a sunt în şcoală?

Problema 3.

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că prin împărțire la $\overline{bc}$, obținem câtul nenul c și restul 0.

Gazeta matematică

Problema 4.

a) Scrieţi numărul 289 ca sumă de 3 pătrate perfecte.
b) Arătaţi că $8^{2018}+9^{2018}+12^{2018}<289^{2018}$.

<u>**Notă**</u>: ***Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.***
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.