Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018

Clasa aVIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\sqrt{20172018^2+40344037} \in \mathbb{N}$.

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2-b^2=3ab$. Să se arate că

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{6b}{a}-\frac{6a}{b}+23} \quad \text{este număr natural pătrat perfect.}$$

c) Să se arate că $\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}$ este număr natural impar oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

<u>Soluţie şi barem de corectare:</u>

a) $20172018=a \Rightarrow 2a+1=40344037 \Rightarrow \sqrt{20172018^2+40344037}=a+1$....**2 puncte**

b) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{6b}{a}-\frac{6a}{b}+23}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2-6\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)+23}=$

$=\sqrt{11-18+23}=4=2^2$.. **2 puncte**

c) Notăm $y=n^2+9n+18=(n+3)(n+6) \Rightarrow (n+4)(n+5)=y+2$

$\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}=n^2+9n+19$ pentru $n \in \mathbb{N}$........................ **1punct**

$n^2+9n+19$ este număr impar pentru n număr par.. **1punct**

$n^2+9n+19$ este num impar pentru n număr impar **1punct**

Problema 2.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BC'}=\frac{CC'}{CD'}$.

Dacă distanţa dintre dreptele AB' şi CD' este egală cu 8cm, atunci să se calculeze aria triunghiului ACD'.

<u>Soluţie şi barem de corectare:</u>

Fie $AB=x, BC=y$ și $CC'=z$.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BC'}=\frac{CC'}{CD'} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{y^2+z^2}=\frac{z^2}{z^2+x^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{2} \ (1).$$

Din (1) rezultă că $x=y=z$ şi atunci paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este cub...**3 puncte**

$B'AD'C$ este tetraedru regulat şi $d(AB', CD')=MN$, unde $MN \perp AB'$ și $MN \perp CD'$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor AB' și, respectiv CD'... **3 puncte**

Dacă $AB'=a$, atunci $AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $AM=\frac{a}{2}$. Din teorema lui Pitagora în triunghiul AMN obţinem $MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}=8cm \Rightarrow a=AB'=8\sqrt{2}cm=AC \Rightarrow$

aria triunghiului ACD' este $32\sqrt{3}\ cm^2$...**1 punct**

Problema 3.

Fie numerele reale $x, y, z \geq 1$ astfel încât $x + y + z = 6$. Arătaţi că

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1} + \frac{y^2+3}{3y^2+1} + \frac{z^2+3}{3z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Gazeta matematică

Soluţie şi barem de corectare:

$\frac{a^2+3}{3a^2+1} \geq \frac{1}{a}$, oricare ar fi $a \in [1, \infty) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^3}{a(3a^2+1)} \geq 0$,oricare ar fi $a \in [1, \infty)$ (1)..............**4 puncte**

Folosind (1) avem: $\frac{x^2+3}{3x^2+1} + \frac{y^2+3}{3y^2+1} + \frac{z^2+3}{3z^2+1} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$..........................**3 puncte**

Problema 4.

Triunghiul ABC are $AB = AC = 6$ cm , $BC = 6\sqrt{3}$ cm şi O este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Pe planul triunghiului ABC se construiesc perpendicularele AM şi ON astfel încât $ON = AM = 8$ cm. Să se demonstreze că $\frac{d(M,BC)+d(N,BC)}{MN} \geq 1$.

Soluţie şi barem de corectare:

Se arată că triunghiul ABC este obtuzunghic $\Rightarrow$ O este în exteriorul triunghiului..............**1punct**

Cazul I ON şi AM sunt de aceeaşi parte a planului ABC. Din T3$\perp$avem $ME \perp BC$ şi $NE \perp BC$, unde E este mijlocul laturii BC.

$\Rightarrow d(M,BC)+d(N,BC) = ME + NE > MN \Rightarrow \frac{d(M,BC)+d(N,BC)}{MN} > 1$ (în triunghiul MNE , suma lungimilor a două din laturi este mai mare decât a treia latură).. **2 puncte**

Cazul II: ON şi AM nu sunt de aceeaşi parte a planului ABC. Din T3$\perp$avem $ME \perp BC$ şi $NE \perp BC$, unde E este mijlocul laturii BC. OA = R = 6cm pentru că $\triangle OAB$ echilateral $\Rightarrow OE =$ EA=3cm, $MA \parallel$ ON$\Rightarrow M, E, N$

coliniare$\Rightarrow d(M,BC)+d(N,BC) = ME + NE = MN \Rightarrow \frac{d(M,BC)+d(N,BC)}{MN} = 1$.

Din cele două cazuri $\Rightarrow \frac{d(M,BC)+d(N,BC)}{MN} \geq 1$

.... **4 puncte**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVI-a

Problema 1.

Determinați numerele naturale nenule a,b,x,y astfel încât $(a,b)=2^{x+y}$ şi $a+b=12$. Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$(a,b)=2^{x+y} \Rightarrow \exists m,n\in\mathbb{N}^*$, cu $\left(m,n\right)=1$ a. î. $a=m\cdot 2^{x+y}$ şi $b=n\cdot 2^{x+y}$	**2p**
$a+b=12 \Rightarrow m\cdot 2^{x+y}+n\cdot 2^{x+y}=12,(m,n)=1$	**1p**
$2^{x+y}(m+n)=2^2\cdot 3$ Cum $x,y\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x+y\geq 2$ $\Rightarrow x+y=2$ și $m+n=3,\ (m,n)=1$	**2p**
Cazul I: $x=y=1$ $m=1\Rightarrow a=4$ $n=2\Rightarrow b=8$	**1p**
Cazul II: $x=y=1$ $m=2\Rightarrow a=8$ $n=1\Rightarrow b=4$	**1p**

Problema 2.

Arătați că fracția $\dfrac{2018^{2018}-2018^{2017}-2018^{2016}}{2017^{2018}-2017^{2017}-2017^{2016}-1}$ este reductibilă.

Soluție și barem de corectare:

$U(2018^{2018})=U(8^{2018})=U(8^{4k+2})=4$ $U(2018^{2017})=U(8^{2017})=U(8^{4k+1})=8$ $U(2018^{2016})=U(8^{2016})=U(8^{4k})=6$ $U(2018^{2018}-2018^{2017}-2018^{2016})=0$	**0,5p** **0,5p** **0,5p** **1,5p**
$U(2017^{2018})=U(7^{2018})=U(7^{4k+2})=9$ $U(2017^{2017})=U(7^{2017})=U(7^{4k+1})=7$ $U(2017^{2016})=U(7^{2016})=U(7^{4k})=1$ $U(2017^{2018}-2017^{2017}-2017^{2016}-1)=0$	**0,5p** **0,5p** **0,5p** **1,5p**
Precizarea că fracția se simplifică prin 2, 5 sau 10, deci este reductibilă.	**1p**

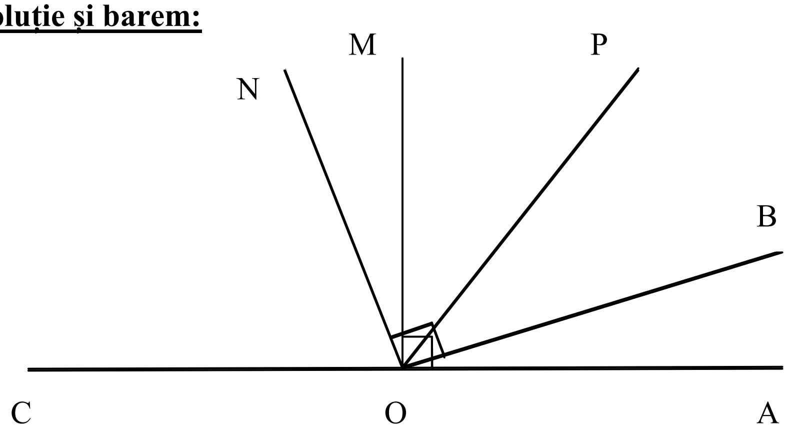
Problema 3.

Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle$AOB și semidreapta [OC opusă semidreptei [OA. Știind că în semiplanul determinat de dreapta OA și în care se află semidreapta [OB, se duc $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$ și că măsura $\sphericalangle$AOB este o treime din măsura $\sphericalangle$NOC, iar [OP este bisectoarea $\sphericalangle$AON, se cere:

a) Aflați măsura unghiurilor $\sphericalangle$AOB și $\sphericalangle$COP;

b) Demonstrați că [OP este bisectoarea $\sphericalangle$BOM.

<u>Soluție și barem:</u>



a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x \Rightarrow m(\sphericalangle CON) = 3x$ [OA și [OC semidrepte opuse $\Rightarrow m(\sphericalangle AOC) = 180° \Rightarrow$ $x + 90° + 3x = 180° \Rightarrow x = 22°30' \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 22°30'$	**1p** **1p**
$m(\sphericalangle AON) = x + 90° = 112°30'$ [OP bisectoarea $\sphericalangle$AON $\Rightarrow m(\sphericalangle AOP) = m(\sphericalangle PON) = \dfrac{m(\sphericalangle AON)}{2} = 56°15'$ $m(\sphericalangle CON) = 3x = 67°30'$ $m(\sphericalangle COP) = m(\sphericalangle CON) + m(\sphericalangle NOP) = 123°45'$	**0,5p** **1p** **0,5p** **0,5p**
b) $m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle AOP) - m(\sphericalangle AOB) = 33°45'$ $m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle AOM) - m(\sphericalangle AOP) = 33°45'$ Obținem $m(\sphericalangle BOP) = m(\sphericalangle MOP) = 33°45' \Rightarrow [OP$ bisectoarea $\sphericalangle$BOM.	**1p** **1p** **0,5p**

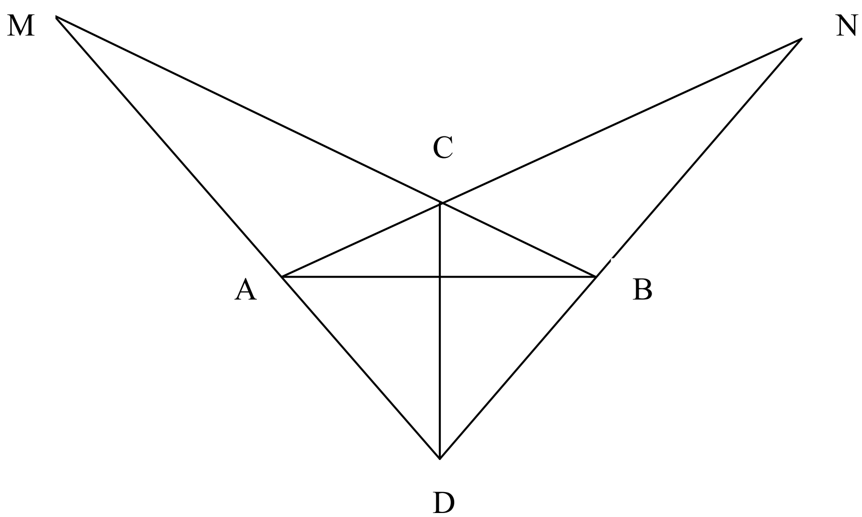
Problema 4.

Fie C și D două puncte situate de o parte și de alta a segmentului [AB] astfel încât [AC]≡[BC] și [AD]≡[BD]. Dacă DA∩BC={M} și DB∩AC={N} demonstrați că:

a) ∢MAC≡∢NBC;

b) [AM]≡[BN].

<u>Soluție și barem de corectare:</u>



a) $\Delta ACD \equiv \Delta BCD$: $[CD] \equiv [CD]$ (latură comună) (LLL) $[AC] \equiv [BC]$ (ip.) $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$ $[AD] \equiv [BD]$ (ip.)	**2p**
$m(\sphericalangle MAC) = 180^\circ - m(\sphericalangle CAD)$ $m(\sphericalangle NBC) = 180^\circ - m(\sphericalangle CBD)$ $\Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$ $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$	**2p**
b) $\Delta MAC \equiv \Delta NBC$: $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$ (a) (ULU) $[AC] \equiv [BC]$ (ip.) $\Rightarrow [AM] \equiv [BN]$ $\sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle NCB$ (∢ opuse la vârf)	**3p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVII-a

Problema 1.

Fie numerele a, b, c, d $\in \mathbf{R}_+$ astfel încât $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$. Să se demonstreze că $E \in N$ unde

$$E = \frac{2018+a}{1+a+ab+abc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018+c}{1+c+cd+cda} + \frac{2018+d}{1+d+da+dab}$$

Soluție și barem de corectare:

Se amplifică rapoartele: primul cu bcd, al treilea cu b, al patrulea cu bc și se obține **(** 2p**)**

$$E = \frac{2018bcd+1}{bcd+1+b+bc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018b+bc}{b+bc+bcd+1} + \frac{2018bc+cdb}{bc+bcd+1+b}(2p) = \frac{2018\cdot(bcd+1+b+bc)+1+b+bc+bcd}{bcd+1+b+bc}(2p)$$

$$= \frac{2019\cdot(1+b+bc+bcd)}{1+b+bc+bcd} = 2019 \in \mathbf{N}(1p)$$

Problema 2.

a) Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, scris în sistemul de numerație zecimal,dacă $\sqrt{\overline{aabba}} = \overline{aab} - b - a$.

b) Fie $E_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Să se determine $n \leq 15$ pentru care $E_n \in Q$.

Solutie și barem de corectare:

a) $\sqrt{\overline{aabba}} = 109 \cdot a \Rightarrow \overline{aabba} = 11881 \cdot a^2 (2p)$

Pentru $a \geq 3 \Rightarrow 11881 \cdot a^2 > \overline{aabba}$ **(**0,5p)

a$\neq$0, cifră,

Prin verificare se obține soluția a=1 și b=8, $\overline{ab} = 18$. **(**0,5p**)**

b)

$$E_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + ... \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\cdot 1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}} + ... \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}\right) + ...$$

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} ...... \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}(3p)$$

$$E_n \in Q \Leftrightarrow \sqrt{n+1} \in Q \Leftrightarrow n+1 pp, n \leq 15 \Rightarrow n \in \{3,8,15\}$$ (1p)

Problema 3.

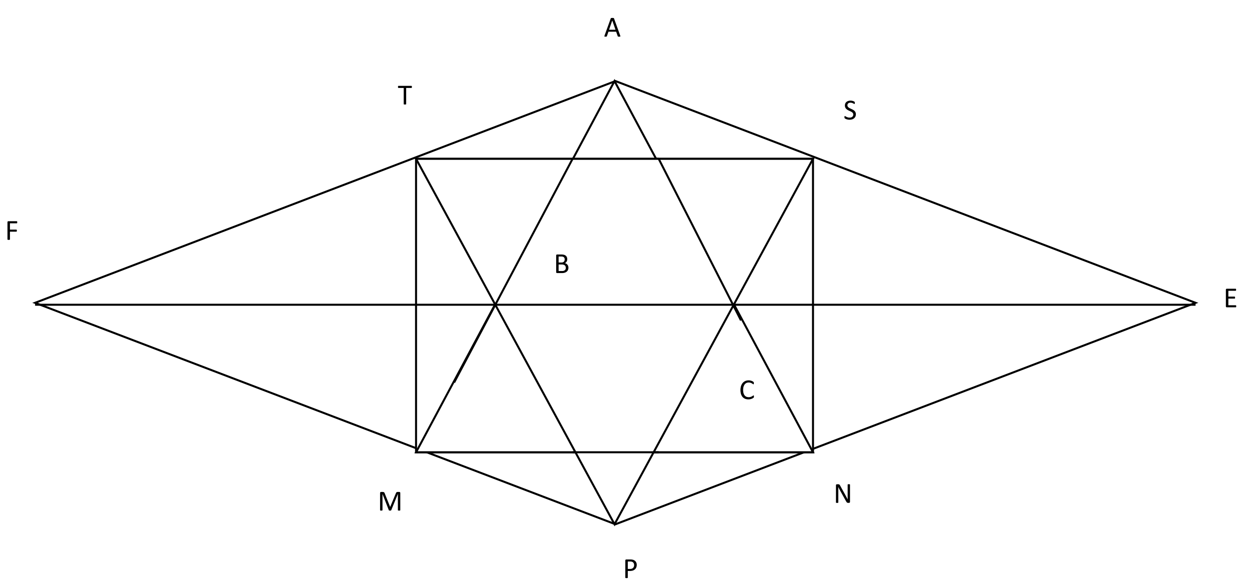
Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC. Perpendicularele în A pe AB, respectiv AC intersectează dreapta BC în E respectiv în E, respectiv F. Dacă $EN \perp AC, N \in AC$, $FM \perp AB, M \in AB$ și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

a) AEPF și ABPC sunt romburi.

b) MNST este dreptunghi, unde {T}=PB ∩ AF și {S}=PC ∩ AE.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:



a) ΔABC isoscel cu baza BC $\Rightarrow m(\prec B) = m(\prec C) = u^\circ, m(\prec A) = 180^\circ - 2u$

$m(\measuredangle FAB) = m(\sphericalangle EAC) = 2u^\circ - 90^\circ, m(\sphericalangle ABF) = m(\sphericalangle ACE) = 180^\circ - u \circ$

$\Delta ABF \equiv \Delta ACE (U.L.U) \Rightarrow AF = AE (1)$

$AF \perp AC, PE \perp AC \Rightarrow AF \parallel PE (2)$

$AE \perp AB, PF \perp AB \Rightarrow AE \parallel PF (3)$

Din (1), (2), (3) AEPF romb……………………….. 2p

$AM \perp PF, PS \perp AE \Rightarrow AM \parallel PS \Rightarrow AB \parallel PC$

$AN \perp PE, PT \perp AF \Rightarrow AN \parallel PT \Rightarrow AC \parallel PB$

ABCP paralelogram, AB=AC $\Rightarrow$ ABPC romb……..1p

b) $\begin{matrix} \Delta FAP, Bortocentru \Rightarrow PT \perp AF (1p) \\ \Delta FAM \equiv \Delta FPT (I.U.) \Rightarrow FM = FT \Rightarrow \Delta TFMisoscel \Rightarrow FB \perp TM (0,5p) \end{matrix}$ (4).

Analog $SN \perp CE$ (5). Din (4) și (5), TM||SN……..(0,5p)

$\Delta APT \equiv \Delta APS (I.U.) \Rightarrow AT = AS \Rightarrow \Delta TASisoscel \Rightarrow AP \perp TS$ (6). Analog $PA \perp MN$ (7) …(1p). Din (6), (7) $\Rightarrow$ TS||MN și cum $TM \parallel SN \Rightarrow$TSNM paralelogram $m(\sphericalangle MT, TS) = m(\sphericalangle AP, FE) = 90^\circ$ (unghiuri cu laturi respectiv paralele) $\Rightarrow$MNST dreptunghi……..(1p)

Problema 4.

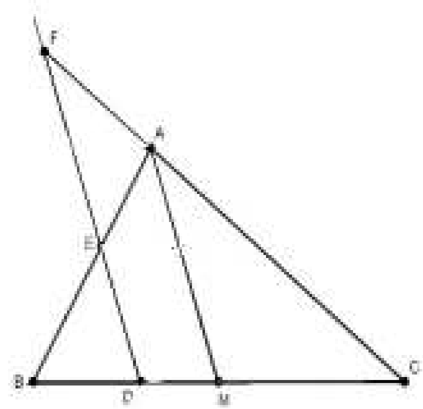
Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC, se duce paralela la mediana AM, M ∈ (BC), care intersectează dreptele AB și AC, în E și respectiv F. Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$;

b) DE + DF este constantă.

Soluție și barem de corectare:

a)



M mijlocul [BC] ⇒ BM = MC, AM || DF $\overset{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AF}{AC} = \frac{DM}{MC} (1,5p)$, DE || AM $\overset{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AE}{AB} = \frac{DM}{MB} (1,5p)$

.

Finalizare $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$.(0,5p)

b) $\Delta ABC, DE \parallel AM \xrightarrow{Tfa} \frac{BD}{BM} = \frac{DE}{AM} (1,25p)$

$\Delta CFD, AM \parallel FD \xrightarrow{Tfa} \frac{CD}{CM} = \frac{DF}{AM} (1,25p)$

Adunând relațiile membru cu membru obținem:

$\frac{DE+DF}{AM} = \frac{BC}{BM} = 2$

Deci $DE + DF = 2AM = ct.$ (1p)

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aV-a

Problema 1. Se dau numerele:

$$a=\left[2+2^2\cdot 2^{24}+2^{95}:2^{14}+2\cdot\left(3^2\right)^{25}\right]:\left(1+2^{25}+2^{80}+3^{50}\right)\cdot 1^{300}-2+3^{16}$$

$$b=2^{70}-\left\{2^3\cdot 1111_{(2)}-5\cdot\left[5-\left(10^4-9375\right):5^3\right]:9^{1994}-26\cdot 2^2\right\}\cdot 2^{65}$$

a) Arătați că **a** este pătrat perfect și **b** nu este pătrat perfect;
b) Comparați numerele date.

Barem:

a) Calculează $a=3^{16}$ ………..**2p**
Obține $b=2^{69}$ ……….**2p**
Scrie pe $a=\left(3^8\right)^2 \Rightarrow$ a este pătrat perfect……..**0,5p**
Ultima cifră a lui b este 2, de unde rezultă că numărul nu este pătrat perfect. ………….**0,5p**

b) Avem $3^{16}<16^{16}=2^{64}$……..**1p**
Dar $2^{64}<2^{69}$ ……..**0,5p**
Obținem prin tranzitivitate că $a<b$ …..**0,5p**

Problema 2.

Într-o şcoală, numărul elevilor de clasa a V-a, este cuprins între cel mai mic număr natural de trei cifre distincte şi cel mai mic număr natural de trei cifre identice. Un sfert dintre aceştia participă la corul şcolii şi a noua parte dintre elevi frecventează cercul de matematică.

Câţi elevi de clasa a V-a sunt în şcoală?

Barem:

Fie n numărul de elevi. Atunci $102<n<111$.	**2p**
$n \vdots 4, n \vdots 9, (4,9)=1 \Rightarrow n \vdots 36$ sau numărul de elevi este număr natural, deci n se împarte exact la 4 şi la 9	**4p**
n = 108	**1p**

Problema 3.

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că prin împărțire la $\overline{bc}$, obținem câtul nenul c și restul 0.

Gazeta matematică

Barem:

$100a+\overline{bc}=c\cdot\overline{bc}\Rightarrow 100a=\overline{bc}\cdot(c-1)$ cu cifrele a și c nenule **…(2p)**

Cum $u(100a)=0\Rightarrow$ că și membrul drept are ultima cifră 0 și cum c cifră nenulă aceasta ia valorile 5 și 6…………..**(2p)**

Dacă $c=5\Rightarrow 100a=4\cdot\overline{b5}\Rightarrow\overline{b5}=25\cdot a\Rightarrow(a;b)\in\{(1;2),(3;7)\}$ **…(1,5p)**

Dacă $c=6\Rightarrow 100a=5\cdot\overline{b6}\Rightarrow\overline{b6}=20a\Rightarrow$ nu avem soluție. **……..(1p)**

Obținem numerele: 125 și 375. **(0,5p)**

Problema 4.

a) Scrieţi numărul 289 ca sumă de 3 pătrate perfecte.
b) Arătaţi că $8^{2018}+9^{2018}+12^{2018}<289^{2018}$.

Barem:

$a)\,289=8^2+9^2+12^2$	**2p**
b) $8^{2016}<289^{2016}\,\vert\cdot 8^2\Rightarrow 8^{2018}<289^{2016}\cdot 8^2$ $9^{2016}<289^{2016}\,\vert\cdot 9^2\Rightarrow 9^{2018}<289^{2016}\cdot 9^2$ $12^{2016}<289^{2016}\,\vert\cdot 12^2\Rightarrow 12^{2018}<289^{2016}\cdot 12^2$	**3p**
Adunând relaţiile membru cu membru se obţine : $8^{2018}+9^{2018}+12^{2018}<289^{2016}(8^2+9^2+12^2)$ $8^{2018}+9^{2018}+12^{2018}<289^{2018}$.	**2p**