Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a X-a

Problema 1. a) Să se determine partea întreagă a numărului $x = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$.

b) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x) = [x] + x$, unde prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x.

Soluţie şi barem de corectare:

a) $x = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8 > 3\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \log_3 5 \log_5 8} =$

$= 3\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5}} = 3\sqrt[3]{3} > 4$......................................**1 punct**

$\log_2 3 < 2, \log_3 5 < \frac{3}{2}, \log_5 8 < \frac{3}{2} \Rightarrow x < 5$......................................**1 punct**

$\Rightarrow [x] = 4$......................................**1 punct**

b) $f(x) = f(y) \Rightarrow x + [x] = y + [y] \Rightarrow 2([x] - [y]) = \{y\} - \{x\}$ (1)

$0 \le \{y\} < 1$ şi $-1 < -\{x\} \le 0 \Rightarrow \{y\} - \{x\} \in (-1,1)$ (2)......................................**1 punct**

$[x] - [y]$ *este număr întreg* (3)

Din (1), (2) *şi* (3) $\Rightarrow \{y\} - \{x\} = 0 \Rightarrow [x] - [y] = 0 \Rightarrow [x] = [y]$ *şi* $\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ *este injectivă*......................................**1 punct**

$f(x) = 1{,}5 \Rightarrow 2[x] + \{x\} = 1{,}5$......................................**1 punct**

$2[x] \in \mathbb{Z}$ şi $2[x] = 1{,}5 - \{x\} \Rightarrow 2[x] = 1$

ceea ce este fals pentru că 1 număr impar

$\Rightarrow f$ nu este surjectivă......................................**1 punct**

Problema 2. Fie $a > 0$ şi $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie care verifică relaţia :

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că funcţia f este periodică.

Soluţie şi barem de corectare:

$f(x+a) \ge \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \ge \frac{1}{2}$ (1)......................................**1 punct**

$f(x) - f^2(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) \in [0,1]$ (2)

Din (1) *şi* (2) $\Rightarrow f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \forall x \in \mathbf{R}$ (3)......................................**1 punct**

$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} =$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}\right)^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} =$

$= \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - f(x)\right| = f(x)$ (am ţinut cont de relaţia (3))......................................**4 puncte**

$f(x+2a) = f(x)$, adică f este funcţie periodică......................................**1 punct**

Problema 3. a) Fie $x, y, z > 0$. Demonstrați că:

$$\frac{x^3+y^3}{z^2}+\frac{y^3+z^3}{x^2}+\frac{z^3+x^3}{y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 6$$

(***)

b) Fie $a, b, c > 0$ cu $a+b+c=1$. Să se arate că :

$$\frac{a^3(a+1)}{a+bc}+\frac{b^3(b+1)}{b+ca}+\frac{c^3(c+1)}{c+ab} \ge \frac{1}{3}$$

Gazeta matematică

Soluţie şi barem de corectare:

a) $\frac{x^3+y^3}{z^2}+\frac{y^3+z^3}{x^2}+\frac{z^3+x^3}{y^2} = \left(\frac{x^3}{z^2}+\frac{y^3}{x^2}+\frac{z^3}{y^2}\right)+\left(\frac{y^3}{z^2}+\frac{z^3}{x^2}+\frac{x^3}{y^2}\right) \ge \frac{(x+y+z)^3}{(x+y+z)^2}+\frac{(x+y+z)^3}{(x+y+z)^2}(\text{Radon}) =$
$= 2(x+y+z)$..**1 punct**

$\frac{x^3+y^3}{z^2}+\frac{y^3+z^3}{x^2}+\frac{z^3+x^3}{y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 2(x+y+z)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge$
$\ge 2\sqrt{(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \ge 2\sqrt{9} = 6$...**1 punct**

b) $\frac{a^3(a+1)}{a+bc}+\frac{b^3(b+1)}{b+ca}+\frac{c^3(c+1)}{c+ab} = A,\ B = \frac{a^4}{a+bc}+\frac{b^4}{b+ac}+\frac{c^4}{c+ab},\ C = \frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ac}+\frac{c^3}{c+ab}$

Folosind inegalitatea lui Radon, obţinem: $B \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c+ab+bc+ac}$ **(1)**……… ……………**1 punct**

Pe de altă parte, avem: $ab+ac+bc \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$

şi , din Titu Andreescu, $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$

Astfel, (1) devine : $B \ge \frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}$ **(2)**………………………………………………………**1punct**

Folosind inegalitatea lui Radon, obţinem:

$C \ge \frac{(a+b+c)^3}{\left(\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab}\right)^2} \ge \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9}(a+bc)}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9}(b+ac)}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9}(c+ab)}\right)^2}$ **(3)**……………………….**1 punct**

Dar, $\frac{\frac{4}{9}+a+bc}{2}+\frac{\frac{4}{9}+b+ac}{2}+\frac{\frac{4}{9}+c+ab}{2} \ge \sqrt{\frac{4}{9}(a+bc)}+\sqrt{\frac{4}{9}(b+ac)}+\sqrt{\frac{4}{9}(c+ab)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{7}{3}+\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2} \ge \frac{\frac{7}{3}+bc+ac+ab}{2} \ge \sqrt{\frac{4}{9}(a+bc)}+\sqrt{\frac{4}{9}(b+ac)}+\sqrt{\frac{4}{9}(c+ab)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{9}\cdot(a+bc)}+\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(b+ac)}+\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(c+ab)} \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(a+bc)}+\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(b+ac)}+\sqrt{\frac{4}{9}\cdot(c+ab)}\right)^2 \le \frac{16}{9}$ **(4)**…………………………**1 punct**

Din **(3)** şi **(4)** $\Rightarrow C \ge \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{16} = \frac{1}{4}$

Aşadar, $A = B + C \ge \frac{1}{12}+\frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$…………………………………………………….**1 punct**

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}, n > 2$, ecuația $x^n + 2018x + 1 = 0$ și $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ soluție a acestei ecuații. Demonstrați că $|z| \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$.

Soluţie şi barem de corectare:

Dacă $z = r(\cos t + i \sin t)$ cu $\sin t \neq 0$ este soluţie strict complexă a ecuaţiei, atunci

$r^n(\cos nt + i \sin nt) + 2018r(\cos t + i \sin t) + 1 = 0$…………………………………......**2 puncte**

$$r^n \cos nt + 2018r \cos t + 1 = 0 \,|\cdot(-\sin t)$$

$$r^n \sin nt + 2018r \sin t = 0 \,|\cdot(\cos t)$$

$r^n(\sin nt \cos t - \sin t \cos nt) - \sin t = 0$……………………………………………**2 puncte**

$r^n = \frac{\sin t}{\sin(n-1)t}$

$r^n = \frac{|\sin t|}{|\sin(n-1)t|}$..**1 punct**

Dar $|\sin kt| \leq k|\sin t|, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |\sin(n-1)t| \leq (n-1)|\sin t|$…………………..........**1 punct**

$r^n \geq \frac{1}{n-1}$, $r \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$………………………………………………………………....................**1 punct**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a IX-a

Problema 1.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+3}{2}}\right]=\sqrt{\frac{x+2}{3}}$.

Barem: $x\geq -2$ și $x=3\cdot n^2-2, n\in\mathbb{N}$..........**2p**

$$n\leq\sqrt{\frac{3\cdot n^2+1}{2}}<n+1\Rightarrow\begin{cases}n\in\mathbb{N}\\ n\geq 1\\ n\cdot(n-4)<1\end{cases}\Rightarrow n\in\{1,2,3,4\}\Rightarrow x\in\{1,10,25,46\}$$

1p **3p** **1p**

Problema 2.

Fie triunghiul ABC cu centrul de greutate G. Punctele M, N și P sunt simetricele punctelor A, B și C în raport cu B, C și respectiv A.

a) Demonstrați că $3\cdot\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{CB}=4\cdot\overrightarrow{BA}$

b) Dacă centrul de greutate al triunghiului MNP coincide cu ortocentrul triunghiului ABC, demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.

Barem: a) Exprimă vectorul $\overrightarrow{MG}$ și verifică relația.........**3p**

b)Justifică faptul că ΔABC și ΔMNP au același centru de greutate......**2p**

Deduce că ΔABC este echilateral....**1p**

Deduce că ΔMNP este echilateral....**1p**

Problema 3.

Numerele reale $a,b,c>0$ verifică relația $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=3$.

Demonstrați că $\frac{a^2+b^2}{a+b+1}+\frac{b^2+c^2}{b+c+1}+\frac{c^2+a^2}{c+a+1}\geq\frac{6\cdot a\cdot b\cdot c+6}{a+b+c+3}$.

Gazeta matematică

Barem: Fie $p=a\cdot b\cdot c$ și $s=a+b+c$.

$\sum\frac{a^2+b^2}{a+b+1}\geq\sum\frac{(a+b)^2}{2\cdot(a+b+1)}\geq\frac{(2\cdot s)^2}{4\cdot s+6}=\frac{2\cdot s^2}{2\cdot s+3}$ **2p**

$3\geq 3\cdot\sqrt[3]{p^2}\Rightarrow p\leq 1\Rightarrow\frac{6\cdot p+6}{s+3}\leq\frac{12}{s+3}$ **2p**

$\frac{2\cdot s^2}{2\cdot s+3}\geq\frac{12}{s+3}\Leftrightarrow(s-3)\cdot(s^2+6\cdot s+6)\geq 0$ **1p**

$s^2\geq 3\cdot(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)\Rightarrow s-3\geq 0$ **1p**

Finalizare........... **1p**

Problema 4.

Fie numerele $x, y, z \in [-1,1] \setminus \{0\}$, oricare două diferite, care verifică egalitățile $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ definim numerele $a_n = \frac{x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}}{x^n+y^n+z^n}$ și $S_n = [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n]$. Demonstrați că $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leq S_n \leq 2 \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Barem: Obține că exact unul dintre numerele x, y și z este 1 și celelalte două sunt opuse......**2p**

Există $a \in (-1,1) \setminus \{0\}$ a.î. $a_n = \begin{cases} 1 + 2 \cdot a^{n+1}, n \text{ impar} \\ \frac{1}{1+2\cdot a^n}, n \text{ par} \end{cases}$ **1p**

Termenii a_n de rang par au partea întreagă 0 .... **1p**

Termenii a_n de rang impar au partea întreagă 1 sau 2 .... **1p**

$S_{2\cdot k} = S_{2\cdot k-1}$ și fiecare conține exact k termeni nenuli, deci $k \leq S_{2\cdot k-1} = S_{2\cdot k} \leq 2 \cdot k$ **1p**

Finalizare........ **1p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a XI-a

Problema 1.

Se dau matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea $A \cdot B = O_n$. Arătați că

a) $det(B^2 + I_n) \geq 0$;

b) $det(A^2 + A + 2I_n) \geq 0$;

c) $det(A^2 + A + 2I_n + 2B^2) \geq 0$.

Soluție și barem de corectare:

a) $det(B^2 + I_n) = det\big((B + iI_n)(B - iI_n)\big) = det(B + iI_n) \cdot \overline{det(B + iI_n)} = |det(B + iI_n)|^2 \geq 0$; **2 p.**

b) **1 p.** Ecuația $x^2 + x + 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ și

$x_2 = \overline{x_1} = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \Rightarrow A^2 + A + 2I_n = (A - x_1 I_n)(A - \overline{x_1} I_n) \Rightarrow$

2p. $\Rightarrow det(A^2 + A + 2I_n) = det(A - x_1 I_n) \cdot \overline{det(A - x_1 I_n)} = |det(A - x_1 I_n)|^2 \geq 0$;

c)**1p.** $(A^2 + A + 2I_n)(B^2 + I_n) = A^2 + A + 2I_n + 2B^2$

1p. $det(A^2 + A + 2I_n + 2B^2) = det(A^2 + A + 2I_n) \cdot det(B^2 + I_n) \geq 0$.

Problema 2.

Se dă șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ definit prin $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \in N^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)$

Soluție și barem de corectare:

$x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x_n)_{n\in N^*}$ monoton crescător **1p.**

$x_1 \in (0,1)$, presupun $x_k \in (0,1)$ și demonstrez că $x_{k+1} \in (0,1)$

$x_{k+1} - 1 = x_k^2 - x_k = x_k(x_k - 1) < 0 \Rightarrow x_{k+1} < 1$

$$x_{k+1} = x_k^2 - x_k + 1 = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Conform PIM rezultă $x_n \in (0,1), \forall n \geq 1$ **1p**.

Conform Teoremei Weierstrass rezultă $(x_n)_{n\in N^*}$ convergent. **1p.**

Fie

$l \in R, l = \lim_{n\to\infty} x_n$

Trecând la limită în relația de recurență se obține

$l = l^2 - l + 1 \Rightarrow l = 1$ **1p.**

$x_n = \frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}$ **1p.**

$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \frac{x_2-1}{x_1-1} \cdot \frac{x_3-1}{x_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n+1}-1}{x_n-1} = \frac{x_{n+1}-1}{x_1-1}$ **1p.**

$\lim_{n\to\infty}(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-1}{x_1-1} = 0$ **1p.**

Problema 3.

Se consideră o mulțime $G \subset M_2(R)$ cu proprietățile:

P_1: Pentru orice $A, B \in G$ avem $A + B \in G$;
P_2: Pentru orice $A \in M_2(R)$ cu proprietatea $Tr\left({}^tA \cdot A\right) = 1$, avem $A \in G$.
Să se demonstreze că $G = M_2(R)$.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

1p. dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in G$ atunci $A_1 + A_2 + \dots + A_n \in G, \forall n \in N^* \Rightarrow nA \in G, \forall A \in G, \forall n \in N^*$.

1p. dacă $A \in M_2(R)$ astfel încât $Tr\left({}^tA \cdot A\right) = 1 \Rightarrow Tr\left({}^t(-A) \cdot (-A)\right) = 1 \Rightarrow A, -A \in G$.

0,5p. dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ atunci $Tr\left({}^tA \cdot A\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

1p. fie
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{P_2}{\Rightarrow} A_1, A_2, A_3, A_4 \in G \Rightarrow qA_i \in G, \forall q \in Z, \forall i = \overline{1,4} \overset{P_1}{\Rightarrow} \forall A \in M_2(Z) \Rightarrow A \in G$
.

0,5p. fie $x \in (0,1)$ și $B_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \overset{P_2}{\Rightarrow} B_1, B_2 \in G \overset{P_1}{\Rightarrow} C_1 = B_1 + B_2 \in G$

1p. analog
$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \in G, \forall x \in (0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G, \forall x, y, z, t \in (0,1)$

1p. fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{a\} & \{b\} \\ \{c\} & \{d\} \end{pmatrix} \in G$.(1)

0,5p. $\forall A \in G \Rightarrow A \in M_2(R)$.(2)

0,5p. (1) și (2) $\Rightarrow G = M_2(R)$.

Problema 4.

Fie șirul $(x_n)_{n\in N^*}$ definit prin $x_1 = 1, x_2 = 2$ și $nx_{n+1} + (n-1)x_{n-1} = (2n-1)x_n, \forall n \geq 2, n \in \mathrm{N}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n\cdot\cos\frac{1}{n}}$.

<u>Soluție și barem de corectare:</u>

1p. $nx_{n+1} + (n-1)x_{n-1} = (2n-1)x_n \Leftrightarrow n(x_{n+1} - x_n) = (n-1)(x_n - x_{n-1}) \Leftrightarrow$

1p. $\Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n) = \frac{(n-1)}{n}(x_n - x_{n-1}) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{n}(x_2 - x_1) = \frac{1}{n}$

1p. $\left.\begin{array}{r} x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n-1} \\ x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{1}{n-2} \\ \dots \\ x_2 - x_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

1p.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n\cdot cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}}{n\cdot cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot cos\frac{1}{(n+1)} - n\cdot cos\frac{1}{n}} =$$

1p. $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{cos\frac{1}{(n+1)} - cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} + n\cdot cos\frac{1}{n}}$

1p.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cos\frac{1}{(n+1)} - cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2sin\frac{2n+1}{2n(n+1)}sin\frac{1}{2n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{sin\frac{2n+1}{2n(n+1)}}{\frac{2n+1}{2n(n+1)}}\cdot\frac{sin\frac{1}{2n(n+1)}}{\frac{1}{2n(n+1)}}\cdot\frac{2n+1}{2n(n+1)}\cdot$$
$$\frac{1}{2n(n+1)}\cdot 2n^2 = 0$$

1p. $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n\cdot cos\frac{1}{n}} = 0$

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a XII-a

Problema 1. Fie mulţimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1+6x & 9x\\ -2x & 1-3x\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right\}$.

a) Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(3xy+x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b) Demonstraţi că G este grup abelian în raport cu înmulţirea matricelor pătratice de ordinul 2.

c) Arătaţi că grupurile $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$ şi $\left(G,\cdot\right)$ sunt izomorfe.

Soluție și barem de corectare:

a)Verificarea egalităţii $A(x)\cdot A(y)=A(3xy+x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ …………………**1p**

$3xy+x+y\neq-\frac{1}{3},\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}\Leftrightarrow\left(3x+1\right)\left(3y+1\right)\neq0,\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ………………**1p**

b) G este parte stabilă a mulţimii $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ faţă de înmulţirea matricelor

verificarea celor patru axiome din definiţia unui grup abelian …………...…………………**3p**

c) $f:\mathbb{R}^*\to G, f(x)=A(\frac{x-1}{3})$

demonstrarea bijectivităţii funcţiei f ……....……………………………………….…………………**1p**

$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^*$ ……………………………………………………………**1p**

Problema 2. Fie $\left(G,\cdot\right)$ un grup cu proprietatea că există o funcţie injectivă $f:G\to G$, astfel încât $f(x^4\cdot f(y))=x^3\cdot f\left(x^3\cdot y\right),\forall x,y\in G.$. Să se arate că $\left(G,\cdot\right)$ este grup abelian.

Soluție și barem de corectare:

Se notează e elementul neutru al grupului $\left(G,\cdot\right)$.

Pentru $x=e$ egalitatea din enunţ devine $f(f(y))=f\left(y\right),\forall y\in G$ …………………….………**1p**

şi obținem $f(y)=y,\forall y\in G$, deoarece funcţia f este injectivă……..........…………….……..**1p**

$x^4\cdot y=x^3\cdot\left(x^3\cdot y\right),\forall x,y\in G.$ ……………………………………………………….…..…**2p**

Folosind asociativitatea şi simplificarea la stânga într-un grup se ajunge la

$x^2=e,\forall x\in G.$ ………...………………………………………………………………...**1p**

Din $x^2y^2=e=\left(xy\right)^2=xyxy,\forall x,y\in G$ şi folosind simplificarea într-un grup deducem că $xy=yx,\forall x,y\in G$ ……………………………………..……………..……….……….…**2p**

Problema 3. Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu $f(0)=0$ care admite o primitivă F cu proprietatea $x+F(x)=(1+x)\cdot f(x),\ \forall x\in(-1;\infty)$. Arătaţi că numărul $f(e-1)$ este întreg.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$(1+x)\cdot f(x)-F(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{(1+x)\cdot f(x)-F(x)}{(1+x)^2}=\dfrac{x}{(1+x)^2}, \forall x\in(-1;\infty)$ ……………..…...**1p**

$\left(\dfrac{F(x)}{1+x}\right)'=\dfrac{x}{(1+x)^2}, \forall x\in(-1;\infty)$ ………………………………………………………..…**1p**

$\dfrac{F(x)}{x+1}=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+c \Leftrightarrow F(x)=(x+1)\ln(x+1)+1+c(x+1)$ …………...……..…**2p**

$f(x)=\ln(x+1)+1+c$ ……………………………………………………………………..…**1p**

Din $f(0)=0$, obţinem $c=-1$ şi $f(x)=\ln(x+1)$ ……………………………………..…....**1p**

$f(e-1)=1$, deci $f(e-1)\in\mathbb{Z}$ ……………………………………………………………......**1p**

Problema 4.

a) Calculaţi $\int(9^x-9^{-x})\sqrt{3^x+3^{-x}}\,dx$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $f^5(x)+f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție și barem de corectare:

a) $\int(9^x-9^{-x})\sqrt{3^x+3^{-x}}\,dx=\int\left(3^x+3^{-x}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(3^x-3^{-x}\right)dx=\dfrac{2}{5}\left(3^x+3^{-x}\right)^{\frac{5}{2}}+c$ ……………....**3p**

b) Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^5+x$. Din ipoteză obţinem $g\circ f=1_{\mathbb{R}}$ ………..**1p**

$g'(x)=5x^4+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci g este injectivă……………...**1p**

Cum g este continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ obţinem $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, deci g este surjectivă………………………………………………………………………………………...**1p**

g bijectivă, $f=g^{-1}$, g continuă pe $\mathbb{R}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ ……………………………………………………………………….**1p**