OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE - ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VII-a 17.03.2018

Problema 1.(7 puncte)

Calculaţi media geometrică a numerelor x şi y, unde:

$$x = 2 - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{12}}\right)\cdot\sqrt{3} - \left(2\sqrt{12} + \frac{2\sqrt{96}}{\sqrt{50}}\right):\left(2\sqrt{3}\right) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right):\frac{1}{3\sqrt{3}}\right] \quad \text{şi}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{240}}.$$

Soluţie: $x = 4$ .... **(3p)**

$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \ldots + \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{240}} - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{240}}$ .... **(1p)**

$y = \frac{3}{4}$ .... **(2p)**

$m_g = \sqrt{3}$ .... **(1p)**

Problema 2.(7 puncte)

Se consideră numărul $a = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+200}$. Arătaţi că numărul $2{,}01\cdot a$ este pătratul unui număr natural.

Soluţie: $a = \frac{1}{\frac{1\cdot2}{2}} + \frac{1}{\frac{2\cdot3}{2}} + \frac{1}{\frac{3\cdot4}{2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{200\cdot201}{2}}$ .... **(2p)**

$a = 2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{200\cdot201}\right)$ .... **(1p)**

$a = \frac{400}{201}$ .... **(2p)**

$2{,}01\cdot a = 4 = 2^2$ .... **(2p)**

Problema 3.(7 puncte)

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Prin O se construieşte o paralelă la AB, care intersectează $[AD]$ şi $[BC]$ în punctele M, respectiv N.

a) Demonstraţi că $OB\cdot OC = OA\cdot OD$.

b) Demonstraţi că $[OM] \equiv [ON]$.

Soluţie: Desen corect .... **(1p)**

a) $\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB\cdot OC = OA\cdot OD$ .... **(2p)**

b) $\Delta DMO \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{OM}{AB}$ **(1)** .... **(1p)**

$OM \| DC \overset{T.Th.}{\Rightarrow} \frac{DM}{DA} = \frac{CO}{CA}$ **(2)** .... **(1p)**

$\Delta CON \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{ON}{AB}$ **(3)** .... **(1p)**

Din (1), (2), (3) rezultă că $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB}$, deci $[OM] \equiv [ON]$ .... **(1p)**

Problema 4.(7 puncte)

În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 120°$, fie D şi E mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[BC]$. Se construieşte $DM \perp BC$, $M \in (BC)$. Dacă $DM \cap AB = \{F\}$, demonstraţi că $AEDF$ este romb.

Soluţie: Desen corect .... **(1p)**

$[DE]$ este linie mijlocie în ΔABC. Rezultă că $DE \parallel AF$ **(1)** şi $DE = \frac{AB}{2}$ .... **(1p)**

$[AE]$ este mediană în triunghiul isoscel ABC. Rezultă că $AE \perp BC$ şi $[AE$ este bisectoarea $\angle BAC$ .... **(2p)**

Cum $FM \perp BC \Rightarrow AE \| FD$ **(2)** .... **(1p)**

În ΔABE, conform T$\sphericalangle 30^0$, $AE = \frac{AB}{2} \Rightarrow AE = DE$ **(3)** .... **(1p)**

Din (1), (2) şi (3), rezultă că $AEDF$ este romb .... **(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!