OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE - ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VIII-a 17.03.2018

Problema 1.(7 puncte)

Fie numerele: $a = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{10}-\sqrt{14}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ și $b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Calculați media aritmetică a numerelor a și $\sqrt{b}$.

Soluţie: $a = \frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$……………………………………………………………**(2p)**

$a = 1 - \sqrt{2}$ ……………………………………………………………………………………**(1p)**

$b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 2$ ……………………**(2p)**

$m_a = \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………………**(2p)**

Problema 2.(7 puncte)

Fie expresia: $E(x) = \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{1-4x^2} - \frac{2}{2x+1}\right) : \left(\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

a) Aduceţi expresia la forma cea mai simplă.

b) Determinaţi valorile lui x pentru care expresia are sens.

c) Calculaţi $E(\sqrt{2})$.

Soluţie: a) $E(x) = \frac{-x}{2x+1}$……………………………………………………………**(4p)**

b) $x \in R \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$……………………………………………………………**(1p)**

c) $\frac{-4+\sqrt{2}}{7}$……………………………………………………………………………**(2p)**

Problema 3.(7 puncte)

Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 12\sqrt{3}\, m, AA' = 6\sqrt{3}\, m, AD = 12\, m$.

a)Determinați tangenta unghiului dintre $C'B$ și DD'.

b)Calculați distanța de la B' la AC.

c)Proiecțiile vârfului A' pe diagonalele AB', AD', $D'B'$ se notează cu M, N, P. Arătați că $AP, B'N, D'M$ sunt concurente.

Soluţie: desen corect……………………………………………………………………**(1p)**

a) $DD' \parallel CC' \Rightarrow \sphericalangle(DD', BC') = \sphericalangle(CC', BC') = \sphericalangle(BC'C) \Rightarrow tg(\sphericalangle BC'C) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ……………………**(3p)**

b) fie $BT \perp AC, T \in (AC)$, Din $T.3.\perp. \Rightarrow B'T \perp AC$……………………………………**(1p)**

$B'T = 6\sqrt{6}$ cm ……………………………………………………………………………**(1p)**

c) Din $T.3.\perp. \Rightarrow AP \perp B'D'$; $D'M \perp AB'$; $B'N \perp AD'$

$AP, B'N, D'M$ înălțimi în $\Delta AB'D' \Longrightarrow AP, B'N, D'M$ sunt concurente. ……………………**(1p)**

Problema 4.(7 puncte)

Fie $SABCD$ piramidă patrulateră regulată $AB = 6\, cm$, $SB = 8\, cm$ și M mijlocul segmentului $[BS]$, $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Determinați cosinusul unghiului dintre dreptele MC și SD.

b) Arătați că $(MAC) \perp (SBD)$.

c) Fie N un punct pe SC, determinați lungimea segmentului NC astfel încât aria triunghiului ΔBND să fie minimă.

Soluţie: desen corect……………………………………………………………………**(1p)**

a) $SD \parallel MO \Rightarrow cos\sphericalangle(CM, SD) = cos\sphericalangle(CMO)$ ……………………………………**(1p)**

$MO = 4\, cm, CO = 3\sqrt{2}\, cm, MC = \sqrt{34}\, cm$……………………………………………**(1p)**

$\Delta AMC\ isoscel, \Delta MOC\ dreptunghic \Longrightarrow cos\sphericalangle(CMO) = \frac{OM}{CM} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$ ……………………………**(1p)**

b) $(MAC) \cap (SBD) = MO$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AC \perp DB\\ AC \perp SO\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)\\ AC \subset (AMC)\end{array}\right\} \Longrightarrow (MAC) \perp (SBD)$$ ……………………………………**(2p)**

c) ΔDNB isoscel$\Longrightarrow ON \perp BD$

$A_{\Delta BND} = \frac{BD \cdot NO}{2}$ minimă$\Longrightarrow ON$ minimă$\Longrightarrow ON \perp SC$

$NC = \frac{9}{4}$ = 2,25 cm……………………………………………………………………**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!