

**Olimpiada de Astronomie și Astrofizică**

**Etapa pe județ -13 martie 2022**

**Barem - secțiunea Seniori 1**

| <b>Subiect tip A</b>   |          | <b>Punctaj (25p)</b> |
|--|----------|----------------------|
| <b>1</b>   | <b>b</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>2</b>   | <b>d</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>3</b>   | <b>a</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>4</b>   | <b>c</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>5</b>   | <b>d</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>6</b>   | <b>b</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>7</b>   | <b>b</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>8</b>   | <b>a</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>9</b>   | <b>c</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>10</b>  | <b>c</b> | <b>2,5 p</b>         |
| <b>Subiect tip B</b>   |          |                      |
| <b>Problema 1 -25 puncte</b>   |          |                      |
| <b>Rezolvare</b>   |          | <b>punctaj</b>       |
| Utilizând legea a treia a lui Kepler   |          |                      |
| $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{K(M + m)}$  |          | <b>1p</b>            |
| Și considerând $M_p \ll M_s$ , $M_N \ll M_s$ rezultă   |          |                      |
| $\frac{a_p^3}{T_p^2} = \frac{a_N^3}{T_N^2}$  |          | <b>1p</b>            |
| $T_N = T_p \sqrt{\frac{a_N^3}{a_p^3}}$   |          | <b>1p</b>            |
| $a_N = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = 80000,25 \text{ UA}$  |          | <b>2p</b>            |
| $b = \sqrt{r_{min} \cdot r_{max}} = 282,85 \text{ UA}$   |          | <b>2p</b>            |
| $T_N = \sqrt{\left(\frac{80000,25 \text{ UA}}{1 \text{ UA}}\right)^3} = 22,6 \cdot 10^6 \text{ ani}$ |          | <b>1p</b>            |
| $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0,99999379$  |          | <b>2p</b>            |
| <b>Total a), b),c)</b>   |          | <b>10p</b>           |
| $g_0 = K \frac{M_p}{R_p^2}$  |          | <b>1p</b>            |
| $2R_s = \alpha d_{ps}$   |          | <b>1p</b>            |

|  |   |
|--|---|
| $T = \frac{2\pi d_{PS}}{v_p} = 2\pi d_{PS} \sqrt{\frac{d_{PS}}{KM_S}}$   | 1p  |
| $\frac{\rho_P}{\rho_S} = \frac{M_P}{M_S} \left( \frac{R_S}{R_P} \right)^3 = \frac{g_0 \alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_P} = 4,4$  | 2p  |
| <b>Total d)</b>  | <b>5p</b>   |
| <p data-bbox="204 495 911 562"> <math display="block">\frac{Q_{\text{absorbit de Pamant}}}{t} = p \frac{Q_{\text{emis de Soare}}}{t},</math> </p> <p data-bbox="204 568 1273 636">este aproximativ egal cu procentul pe care îl reprezintă aria din suprafața Pământului, la distanța razei orbitei sale, din aria suprafeței sferice cu raza egală cu raza orbitei Pământului:</p> <p data-bbox="596 642 879 680"> <math display="block">\pi R_{\text{Pamant}}^2 \approx p 4\pi d_{\text{Soare-Pamant}}^2</math> </p> <p data-bbox="288 689 376 719">Rezultă:</p> <p data-bbox="564 725 916 869"> <math display="block">\frac{\frac{Q_{\text{absorbit de Pamant}}}{t}}{\frac{Q_{\text{emis de Soare}}}{t}} = \frac{\pi R_{\text{Pamant}}^2}{4\pi d_{\text{Soare-Pamant}}^2}.</math> </p> <p data-bbox="288 878 911 907">Având în vedere formula bilanțului energetic al Pământului:</p> <p data-bbox="564 913 906 987"> <math display="block">\frac{Q_{\text{absorbit de Pamant}}}{t} = \frac{Q_{\text{emis de Pamant}}}{t},</math> </p> <p data-bbox="204 996 296 1025">obținem:</p> <p data-bbox="459 1032 1018 1176"> <math display="block">\frac{\frac{Q_{\text{emis de Pamant}}}{t}}{\frac{Q_{\text{emis de Soare}}}{t}} = \frac{\pi R_{\text{Pamant}}^2}{4\pi d_{\text{Soare-Pamant}}^2} = \frac{\sigma T_{\text{Pamant}}^4}{\sigma T_{\text{Soare}}^4} \frac{4\pi R_{\text{Pamant}}^2}{4\pi R_{\text{Soare}}^2};</math> </p> <p data-bbox="475 1182 1002 1279"> <math display="block">\left( \frac{T_{\text{Pamant}}}{T_{\text{Soare}}} \right)^4 = \frac{R_{\text{Soare}}^2}{4d_{\text{Soare-Pamant}}^2}; R_{\text{Soare}} = \eta d_{\text{Soare-Pamant}};</math> </p> <p data-bbox="639 1285 836 1382"> <math display="block">\left( \frac{T_{\text{Pamant}}}{T_{\text{Soare}}} \right)^4 = \frac{\eta^2}{4};</math> </p> <p data-bbox="580 1388 895 1471"> <math display="block">T_{\text{Soare}} = T_{\text{Pamant}} \sqrt[4]{\frac{2}{\eta}} \approx 6.083 \text{ K.}</math> </p> | <p data-bbox="1442 763 1477 792">3p</p> <p data-bbox="1442 1066 1477 1095">3p</p> <p data-bbox="1442 1301 1477 1330">2p</p> <p data-bbox="1442 1435 1477 1464">2p</p> |
| <b>Total e)</b>  | <b>10p</b>  |
| <b>Total B1</b>  | <b>25p</b>  |

## Subiect tip B

### Problema 2- 25 puncte

#### Rezolvare

a) .....5p

Corespunzător desenului din figura 1, rezultă:

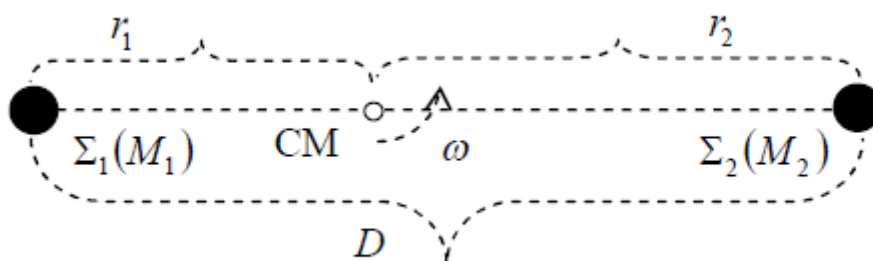


Fig. 1

$$L = M_1 v_1 r_1 + M_2 v_2 r_2 = M_1 \omega r_1^2 + M_2 \omega r_2^2 = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega;$$

$$M_1 r_1 = M_2 r_2; \quad r_1 + r_2 = D;$$

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} D; \quad r_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} D;$$

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega;$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega^2;$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega^2.$$

b) .....5p

În acord cu legea atracției universale, pentru mișcările celor două stele se pot scrie ecuațiile:

$$F = F_{cp1}; K \frac{M_1 M_2}{D^2} = M_1 a_{cp1} = M_1 \omega^2 r_1 = M_1 \omega^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} D;$$

$$F = F_{cp2}; K \frac{M_1 M_2}{D^2} = M_2 a_{cp2} = M_2 \omega^2 r_2 = M_2 \omega^2 \frac{M_1}{M_1 + M_2} D;$$

$$\omega^2 = \frac{K(M_1 + M_2)}{D^3}.$$

c) .....5p

În timpul  $\Delta t$ , în care se produce scurgere de substanță de la o stea spre cealaltă stea, se produc următoarele schimbări:

$$M_1 \rightarrow M_1 + \Delta M_1;$$

$$M_2 \rightarrow M_2 - \Delta M_1;$$

$$\omega \rightarrow \omega + \Delta \omega,$$

$$T \rightarrow T + \Delta T;$$

$$D \rightarrow D + \Delta D,$$

în timp ce:

$$M_1 + \Delta M_1 + M_2 - \Delta M_1 = M_1 + M_2 = \text{constant},$$

deoarece scurgerea de masă de la o stea spre cealaltă stea se face cu respectarea conservării masei;

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega = \text{constant},$$

deoarece sistemul celor două stele se consideră izolat;

$$M_1 M_2 D^2 \omega = \text{constant};$$

$$\omega^2 = \frac{K(M_1 + M_2)}{D^3},$$

relație stabilită anterior;

$$\omega^2 D^3 = K(M_1 + M_2) = \text{constant}.$$

În aceste condiții, rezultă:

$$M_1 M_2 D^2 \omega = (M_1 + \Delta M_1)(M_2 - \Delta M_1)(D + \Delta D)^2(\omega + \Delta \omega);$$

$$M_1 M_2 D^2 \omega = M_1 \left(1 + \frac{\Delta M_1}{M_1}\right) M_2 \left(1 - \frac{\Delta M_1}{M_2}\right) D^2 \left(1 + \frac{\Delta D}{D}\right)^2 \omega \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right);$$

$$1 = \left(1 + \frac{\Delta M_1}{M_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta M_1}{M_2}\right) \left(1 + \frac{\Delta D}{D}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right);$$

$$\left(1 + \frac{\Delta M_1}{M_1}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\Delta M_1}{M_2}\right)^{-1} \approx \left(1 + 2 \frac{\Delta D}{D}\right) \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right);$$

$$\left(1 - \frac{\Delta M_1}{M_1}\right) \left(1 + \frac{\Delta M_1}{M_2}\right) \approx \left(1 + 2 \frac{\Delta D}{D}\right) \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right);$$

$$1 + \frac{\Delta M_1}{M_2} - \frac{\Delta M_1}{M_1} - \frac{\Delta M_1}{M_2} \frac{\Delta M_1}{M_1} = 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta D}{D} + 2 \frac{\Delta D}{D} \frac{\Delta \omega}{\omega};$$

$$\frac{\Delta M_1}{M_2} \frac{\Delta M_1}{M_1} \rightarrow 0; \frac{\Delta D}{D} \frac{\Delta \omega}{\omega} \rightarrow 0;$$

$$\frac{\Delta M_1}{M_2} - \frac{\Delta M_1}{M_1} \approx \frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta D}{D};$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \Delta M_1;$$

$$\omega^2 D^3 = \text{constant};$$

$$\omega^2 D^3 = (\omega + \Delta \omega)^2 (D + \Delta D)^3;$$

$$\omega^2 D^3 = \omega^2 \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2 D^3 \left(1 + \frac{\Delta D}{D}\right)^3;$$

$$1 = \left(1 + \frac{\Delta \omega}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta D}{D}\right)^3;$$

$$1 \approx \left(1 + 2 \frac{\Delta \omega}{\omega}\right) \left(1 + 3 \frac{\Delta D}{D}\right);$$

$$1 = 1 + 3 \frac{\Delta D}{D} + 2 \frac{\Delta \omega}{\omega} + 6 \frac{\Delta \omega}{\omega} \frac{\Delta D}{D};$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \frac{\Delta D}{D} \rightarrow 0;$$

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta \omega}{\omega};$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \Delta M_1;$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} + 2 \left( -\frac{2}{3} \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) = \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \Delta M_1;$$

$$\Delta \omega = -3 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \omega \Delta M_1.$$

d) .....5p

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$\omega + \Delta \omega = \frac{2\pi}{T + \Delta T};$$

$$\omega \left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) = \frac{2\pi}{T \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$\left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) = \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)^{-1};$$

$$\left( 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega} \right) \approx \left( 1 - \frac{\Delta T}{T} \right);$$

$$\Delta \omega = -\frac{\omega}{T} \Delta T;$$

$$\Delta \omega = -3 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \omega \Delta M_1;$$

$$\frac{\omega}{T} \Delta T = 3 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \omega \Delta M_1;$$

$$\Delta M_1 = \frac{1}{3} \frac{M_1 M_2}{M_1 - M_2} \frac{\Delta T}{T};$$

$$\frac{\Delta M_1}{M_1 \Delta t} = \frac{1}{3} \frac{M_2}{M_1 - M_2} \frac{\Delta T}{T} \frac{1}{\Delta t};$$

$$\frac{\Delta M_1}{M_1 \Delta t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1,4 \cdot M_s}{2,9 \cdot M_s - 1,4 \cdot M_s} \cdot \frac{20 \text{ s}}{2,49 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \frac{1}{100 \text{ ani}};$$

$$\frac{\Delta M_1}{M_1 \Delta t} \approx 2,89 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{an}}.$$

e) .....3 p

De la  $\Sigma_2(M_2)$  spre  $\Sigma_1(M_1)$ , adică de la steaua cu masa mică spre steaua cu masa mare.

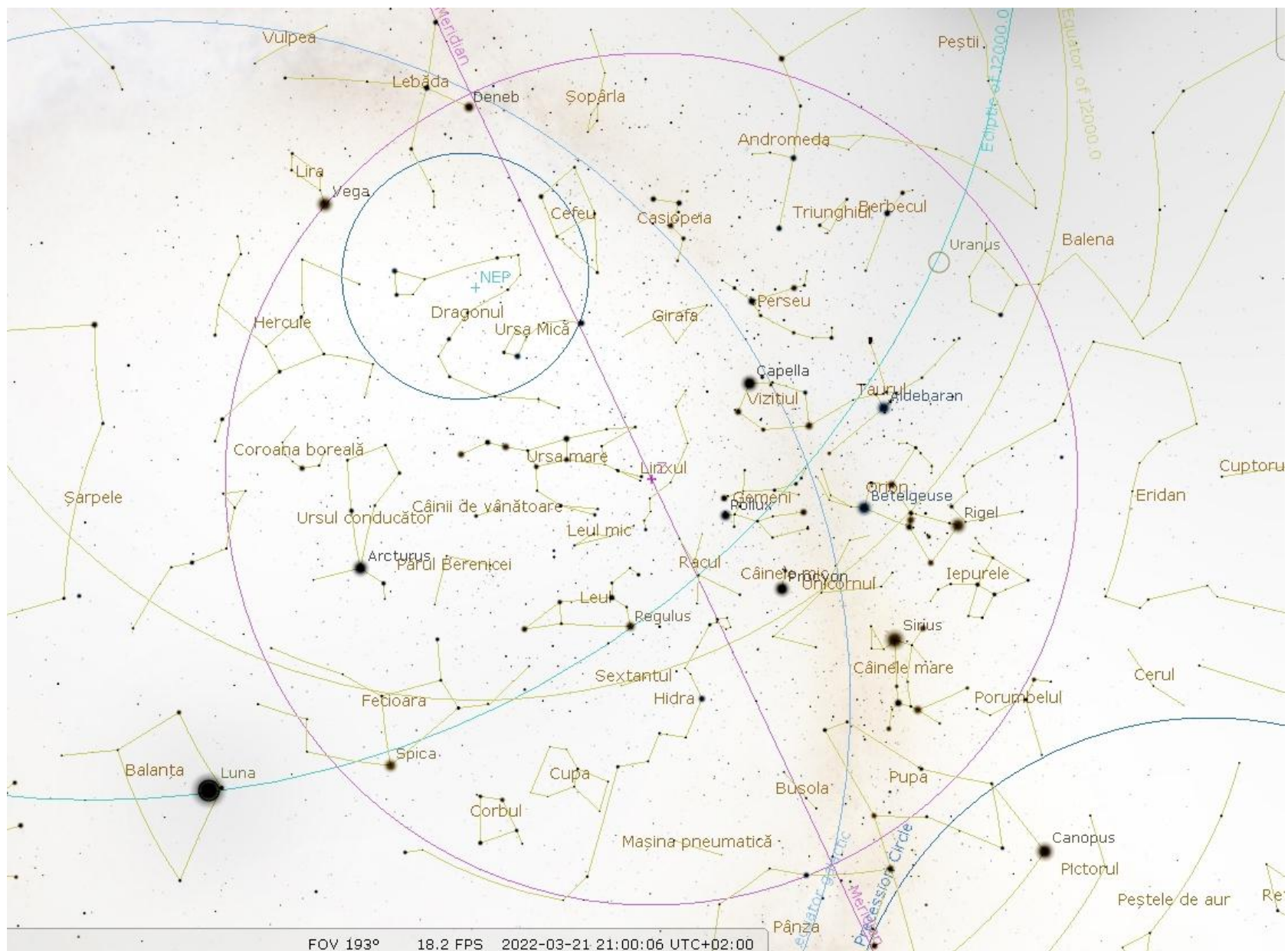
f) ..... 2p

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta \omega}{\omega};$$

$$\Delta \omega = -\frac{\omega}{T} \Delta T; \frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{\Delta T}{T};$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T};$$

$$\frac{\Delta D}{D \Delta t} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T \Delta t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \text{ s}}{2,49 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \frac{1}{100 \text{ ani}} \approx 6,2 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{an}}.$$





### **Subiect tip C**

**5p.** 1. Trasarea orizontului, ecuatorului ceresc, eclipticii, meridianului. Marcarea punctelor cardinale;

**5p.** 2. Trasarea pe hartă a trei constelații zodiacale și două constelații circumpolare;

**5p.** 3. Localizarea pe hartă a cinci obiecte din catalogul Messier din zona circumpolară;

**5p.** 4. Trasarea pe hartă a ecuatorului galactic și localizarea a patru stele strălucitoare din apropierea acestuia. Trecerea numelui stelelor;

**5p.** 5. Localizarea pe hartă a polului nord ecliptic.