Concursul Național de Matematică „Olimpiada Satelor din România”
ETAPA JUDEȚEANĂ – 12 martie 2022
CLASA a VIII – a – Barem

<u>Problema 1</u> (7 puncte = 3 puncte a) + 2 puncte b) + 2 puncte c))

Fie $a = 45 - \sqrt{3}$ *și* $b = 45 + \sqrt{3}$.

a)Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

b)Să se arate că media geometrică este număr irațional.

c)Să se arate că 2022 nu se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte.

Barem de corectare:

a) $ma(a,b) = 45$ (1,5p)

$mg(a,b) = \sqrt{2022}$ (1,5p)

b) $mg(a,b) = \sqrt{2022}$

$u(2022) = 2 \rightarrow 2022$ nu este pătrat perfect

$mg(a,b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (2p)

c) Presupunem prin reducere la absurd că există $m,n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2022 = m^2 - n^2$

$2022 = (m-n)(m+n)$ (0,5p)

m-n și m+n sunt numere naturale cu aceeași paritate astfel $(m-n)(m+n) = 2022$ este divizibil cu 4 (fals) sau este impar (fals) (1p)

Dacă n=0 atunci $m^2 = 2022$ fals (0,5p)

<u>Problema 2</u> (7 puncte)

Se dau mulțimile :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| \leq 5\} \text{ și } B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < \frac{x+1}{2} \leq 1\right\}$$

Determinați $A \cup B$ și $B \cap A$.

Barem de corectare:

$|2x+1| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x+1 \leq 5 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$, deci $A = [-3;2]$......3p

$-3 < \frac{x+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -6 < x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -7 < x \leq 1$, deci $B = (-7;1]$.................................2p

$A \cup B = (-7;2]$..................... ....1p

$B \cap A = [-3;1]$.................. ....1p

<u>Problema 3</u> (7 puncte = 3 puncte a) + 2 puncte b) + 2 puncte c))

În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful V și baza ABC se cunosc $AB = 12\sqrt{2}$ cm și $VA = 8\sqrt{6}\ cm$. Calculați :

a) măsura unghiului format de muchia VA cu planul bazei.

b) distanța de la centrul bazei la dreapta VA.
c) distanța de la mijlocul E al înălțimii $[VO]$ la muchia VA.

Barem de corectare:

a) Desen corect... ....1p

$\sphericalangle(VA;(ABC)) = \sphericalangle(VA;(AO)) = \sphericalangle VAO$, unde O este proiecția ortogonală a punctului V pe planul ABC (cu alte cuvinte VO – înălțimea piramidei) 0,5p

$VABC$ – piramida triunghiulară regulată, deci O – centrul bazei.

Cum $AB = 12\sqrt{2}$ cm, determinăm AO=$4\sqrt{6}\ cm$..1p

Triunghiul VOA dreptunghic, $VA = 8\sqrt{6}\ cm$, AO=$4\sqrt{6}\ cm \Rightarrow \sphericalangle VAO = 60°$.............0,5p

b)

$d(O;VA) = OP$, unde $OP \perp VA$...0,5p

$VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = 12\sqrt{2}$...1p

$OP = 6\sqrt{2}$...0,5p

c)

$d(E;VA) = ER$, unde $ER \perp VA$ 0,5p

Dar $OP \perp VA$ și ER, OP, VA – coplanare , deci $OP \parallel ER$ 0,5p

Cum E – mijlocul [VO] , avem ER linie mijlocie în triunghiul VOP și $ER = 6\sqrt{2}$ 1p

<u>Problema 4</u> (7 puncte = 3 puncte a) + 2 puncte b) + 2 puncte c))

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Se cunoaște faptul că aria secțiunii $ACC'A'$ = $64\sqrt{2}\ cm^2$.

a) Arătați că $AB = 8\ cm$.
b) Demonstrați că planele $(AD'C)$ și $(A'C'B)$ sunt paralele.
c) Determinați aria triunghiului $AD'C$.

a) Desen corect... ....1p

$A_{ACC'A'} = AB \cdot AB\sqrt{2}$...1p

$AB = \sqrt{64}cm = 8\ cm$...1p

b) $AD' \parallel BC'$, $BC' \subset (A'BC') \Rightarrow AD' \parallel (A'BC')$ ……….………..…...….......0,5p

$CD' \parallel BA'$, $BA' \subset (A'BC') \Rightarrow CD' \parallel (A'BC')$ ……….…………………..……........0,5p

$AD' \cap CD' = \{D'\}$, $AD' \subset (AD'C)$, $CD' \subset (AD'C) \Rightarrow (AD'C) \parallel (A'C'B)$..……..........1p

c) AD', CD', AC – diagonale în pătrate congruente, deci $AD'C$ – triunghi echilateral.......1p

$A_{AD'C} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}cm^2$...1p